浸透の支配方程式－直交座標系－

水理学，流体力学，地下水工学など多くの教科書で浸透の支配方程式を紹介している。先んじてこの方程式を示すと以下となる。

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\rho K_{ij}\left(\frac{\partial h}{\partial x_j}\right)\right]+\rho q=\rho Ss\frac{\partial h}{\partial t} \tag{1}$$

ここでは，浸透場は飽和に限定している。一般には，密度流や圧縮性流体を扱うことがない場合には，流体密度ρは時間(t), 位置(場所)(x)に対して不変であるため, 上式から ρ はキャンセルできるので以下となる。

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[K_{ij}\left(\frac{\partial h}{\partial x_j}\right)\right]+q=Ss\frac{\partial h}{\partial t} \tag{2}$$

ここで，K_{ij}：透水係数テンソル[L/T]，S_s：比貯流係数[1/L] ，x_i：直交座標[L]，t：時間[T]，h：全水頭[L] ，q：シンク/ソース流量強度[1/T]，ρ：流体密度[M/L^3]

この式の誘導は，微小あるいは十分均質（一様）とみなされる代表最小体積(control volume)における質量保存則に基づく釣り合い式を考える。単位断面積を通過する流量(flux) u_x で x 方向に流下する密度 ρ の流体は，当該体積内で変化し，下流端部を出るときには Taylor 展開を用いて以下の flux に変化すると考える。

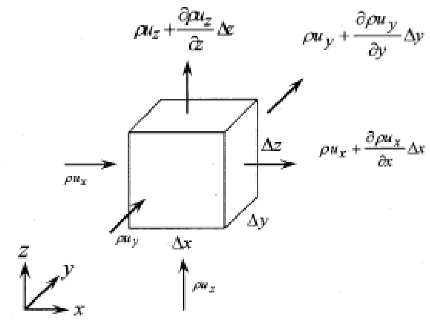
$$\rho u_x+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x)\Delta x+\frac{\partial^2}{2!\partial x^2}(\rho u_x)(\Delta x)^2+\frac{\partial^3}{3!\partial x^3}(\rho u_x)(\Delta x)^3+\frac{\partial^4}{4!\partial x^4}(\rho u_x)(\Delta x)^4+\cdots\cdots \tag{3}$$

ここで，Δx：流下方向の REV(Representative Element Volume 代表最小量)長[L]である。

control volume は十分に小さな大きさと考え，Δx の 2 乗以上の高次項は無視できると考えると，下流端部の流出 flux は以下となる。

$$\rho u_x+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x)\Delta x \tag{4}$$

この関係を 3 次元場に拡張して図示すると以下となる。



図−1　代表最小体積(control volume)

各側面を単位時間あたりに出入りする質量は以下となる。

流入側①： $\rho u_x\Delta y\Delta z+\rho u_y\Delta z\Delta x+\rho u_z\Delta x\Delta y$ (5)

流出側②： $\left[\rho u_x+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x)\Delta x\right]\Delta y\Delta z+\left[\rho u_y+\frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y)\Delta y\right]\Delta z\Delta x+\left[\rho u_z+\frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z)\Delta z\right]\Delta x\Delta y$ (6)

湧き出し or 排出③： $\rho q\Delta x\Delta y\Delta z$ (7)

単位時間あたりの変動④： $\frac{\partial}{\partial t}(\rho S_w n)\Delta x\Delta y\Delta z$ (8)

但し，飽和のみを考えることから，S_w=1 として，$\frac{\partial}{\partial t}(\rho n)\Delta x\Delta y\Delta z$ (9)

上記 4 項には以下の関係が成り立つ。

①－②+③=④

よって以下となる。

$$\begin{aligned}&\left\{\rho u_x\Delta y\Delta z+\rho u_y\Delta z\Delta x+\rho u_z\Delta x\Delta y\right\}\\&-\left[\rho u_x+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x)\Delta x\right]\Delta y\Delta z-\left[\rho u_y+\frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y)\Delta y\right]\Delta z\Delta x-\left[\rho u_z+\frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z)\Delta z\right]\Delta x\Delta y\\&+\rho q\Delta x\Delta y\Delta z=\frac{\partial}{\partial t}(\rho n)\Delta x\Delta y\Delta z\end{aligned} \tag{10}$$

これを整理し，さらに単位体積あたりの標記とするため，両辺を検討体積($\Delta x\Delta y\Delta z$)で除すと以下となる。

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x)\right]-\left[\frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y)\right]-\left[\frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z)\right]+\rho q=\frac{\partial}{\partial t}(\rho n) \tag{11}$$

上式が質量保存の式である。

ここで，フラックス u は一般に扱い難いので，他の指標で表す方が扱いやすい。そこで，運動の式として，Darcy 則を用いる。即ち以下の定義である。

$$u_i=-K_{ij}\frac{\partial h}{\partial x_j} \tag{12}$$

これを質量保存式に代入する。

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho K_{xj}\frac{\partial h}{\partial x_j}\right)\right]+\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho K_{yj}\frac{\partial h}{\partial x_j}\right)\right]+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho K_{zj}\frac{\partial h}{\partial x_j}\right)\right]+\rho q=\frac{\partial}{\partial t}(\rho n) \tag{13}$$

さらに，時間微分項を整理する。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho n)=n\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial n}{\partial t} \tag{14}$$

“概して”，流体は非圧縮性と考えるので，流体密度の微分項は 0，よって

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho n)=\rho\frac{\partial n}{\partial t} \tag{15}$$

さらに，質量保存式に見られる全水頭 h でこれを表すことを考える。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho n)=\rho\frac{dn}{dh}\frac{\partial h}{\partial t} \tag{16}$$

上式の中で dn/dh は単位水頭の変化に対する間隙率 n の変化を表し，上式は単位時間あたりの水頭変化によって間隙体積の変動による貯留水の搾り出し（排水）あるいは取り込み（貯留）と説明できる。このため，土塊にかかる有効応力 σ_e の変化に対する体積圧縮特性を考える。ここで，土塊が飽和状態を維持しているなら，σ_e と間隙水圧 P の合算が全応力と考え（前応力は一定），さらに圧力水頭 ψ との関係を考えると以下となる。

$$d\sigma_e+dP=d\sigma_e+\rho g\psi=0 \tag{17}$$

よって以下となる。

$$d\sigma_e=-\rho g\cdot d\psi \tag{18}$$

さらに，全水頭 h と位置水頭 z と ψ の関係（$h=\psi+z$）から以下となる。

$$d\sigma_e=-\rho g\cdot dh \tag{19}$$

ここで，土塊（体積 V）に対して圧縮係数 α があるとし，これらと有効応力変動の関係を考える。

$$-dV=\alpha Vd\sigma_e \tag{20}$$

また，ここで示した体積変化によって間隙水の占有体積が変化し，この体積変化相当の水量変化 dV_{w1} があ

ると考える。

$$
\begin{aligned}
&dV_{w1} = -dV \\
&= \alpha V d\sigma_e = \alpha\rho g \cdot dh
\end{aligned}
\tag{21}
$$

さて，これまで水は非圧縮性としてきたが，土塊内の貯留変化の観点では比較的硬質な土塊を考えると，土塊の圧縮性だけでなく水の圧縮性が無視できない場合もあることから，水の圧縮による体積変化も dV_{w2} 考慮する。ここで，c_w は水の圧縮率

$$
dV_{w2} = -c_w V_w \cdot dP = c_w n\rho g \cdot dh \tag{22}
$$

これらの式(21)および(22)に示す体積変化量の合算が間隙率の変化に相当する。

$$
\begin{aligned}
&\frac{dn}{dh} = \frac{dV_{w1}}{dh} + \frac{dV_{w2}}{dh} \\
&= \rho g(\alpha + nc_w) = Ss\ [1/L]
\end{aligned}
\tag{23}
$$

ここで，比貯留係数 S_s が定義された。

よって，支配方程式は以下となる。

$$
\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho K_{xj}\frac{\partial h}{\partial x_j}\right)\right] + \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho K_{yj}\frac{\partial h}{\partial x_j}\right)\right] + \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho K_{zj}\frac{\partial h}{\partial x_j}\right)\right] + \rho q = \rho Ss\frac{\partial h}{\partial t} \tag{24}
$$

さらに，流体は流れ全体系においては非圧縮性であると考えると，時間や位置に対して変化ないとできるため，以下の支配方程式となる。

$$
\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xj}\frac{\partial h}{\partial x_j}\right)\right] + \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{yj}\frac{\partial h}{\partial x_j}\right)\right] + \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zj}\frac{\partial h}{\partial x_j}\right)\right] + q = Ss\frac{\partial h}{\partial t} \tag{25}
$$

また，透水係数 K は均質場にあると考えると以下となる。

$$
K_{xj}\frac{\partial^2 h}{\partial {x_j}^2} + K_{yj}\frac{\partial^2 h}{\partial {x_j}^2} + K_{zj}\frac{\partial^2 h}{\partial {x_j}^2} + q = Ss\frac{\partial h}{\partial t} \tag{26}
$$

上式を書き下すと以下となる。

$$
\begin{aligned}
&K_{xx}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_{xy} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}K_{xz}\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \\
&+ K_{yx}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_{yy}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + K_{yz}\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \\
&+ K_{zx}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_{zy}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + K_{zz}\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + q = Ss\frac{\partial h}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{27}
$$

ここで，透水係数 K はテンソル表示となっている。

全 9 項（対称性があるので実質 6 項）の評価方法はクロスホール試験と呼ばれる試験方法で可能となるが, 本シリーズでは Hsieh and Neuman[2)]に基づく説明で改めて扱うこととする。二次元平面(x,y)においては，全 4 項（実質 3 項）の評価方法は，Papadopulos(1965)や Neuman ら(1984)で説明している（後に扱う）。これらはそれぞれの次元でのフルスペックの異方性を扱うケースであり，主透水性分方向と設定座標軸方向に回転角がみられる場合として説明されている。

従って，主透水性分方向と設定座標軸方向が一致する場合は以下となる。

$$
K_{xx}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_{yy}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + K_{zz}\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + q = Ss\frac{\partial h}{\partial t} \tag{28}
$$

井戸理論では，水平方向(x-y)は透水性とし鉛直方向(z)のみこれらと異なる異方性とすることがある。即ち以下となる。

$$
K_h\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_h\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + K_v\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + q = Ss\frac{\partial h}{\partial t} \tag{29}
$$

【参考文献】

1）日本地下水学会地下水流動解析基礎理論のとりまとめに関する研究グループ編：地下水シミュレーション―これだけは知っておきたい基礎理論―，技報堂，232p. ，2010.

2）Hsieh, P. A. and Neuman , S. P.: Field Determination of the three-dimensional hydraulic conductivity tensor of anisotropic media, 1. Theory, Water Resources Research, Vol. 21, No.11, pp.1655-1665, 1985.