スラグ試験(Cooper 法)

(1) 基礎方程式と初期・境界条件

Cooper ら（1967, 1973, 1980）[1)~3)]は，帯水層を完全貫入した井戸を用いたスラグ試験の理論解を誘導している。

基礎方程式は以下の二次元平面非定常放射状流れの式である。

$$\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}=\frac{S}{T}\frac{\partial s}{\partial t} \tag{1}$$

s : 水位変動量 [L]，r : 試験井戸中心軸からの水平距離 [L]，T : 透水量係数 [L^2/T]，S : 貯留係数 [-]，K : 透水係数 [L/T]，S_s : 比貯留係数 [1/T]，$T=Kb$，$S=S_sb$，b : 帯水層厚さ [L]，L : スクリーン（井戸貫入）長 [L]，$b=L$（完全貫入状態）

I.C.　t=0 において，$s(r, t)=0$　(2)

B.C.　$r\to\infty$において，$s(r, t)=0$　(3)

また，t=0 において，$s(r=r_w, t=0)=s_0$（スラグ投入を表す境界条件）　(4)

さらに，孔内外の水位差によって試験孔を出入りする流量とこれに伴う孔内水位変動量には試験孔の貯留項 Cw[L^2]を用いて以下の関係で示される。

$$2\pi T r\left.\frac{ds}{dr}\right|_{r=r_w}=C_w\frac{ds_w}{dt} \tag{5}$$

ここで，井戸貯留項は試験孔内の単位水頭変動に対して必要となる流入あるいは排水量であり，開放型の試験孔では，孔内水位変動区間の試験孔内断面積となる。

(2) 式の整理（無次元化）

理論解の簡素化と汎用性を期待して，以下の無次元化を施す。

$$r_D=\frac{r}{r_w}\quad s_D=\frac{s}{s_0}\quad t_D=\frac{Tt}{Sr_w^2}\quad \alpha=\frac{\pi S r_w^2}{C_w}\quad \beta=\alpha t_D=\frac{\pi T t}{C_w} \tag{6}$$

これら無次元表記を用いて，基礎方程式を書き直す。

$$\frac{dr_D}{dr}=\frac{1}{r_w}\qquad \frac{dt_D}{dt}=\frac{T}{Sr_w^2} \tag{7}$$

$$\frac{s_0}{r_w^2}\frac{\partial^2 s_D}{\partial r_D^2}+\frac{s_0}{r_w^2}\frac{1}{r_D}\frac{\partial s_D}{\partial r_D}=\frac{s_0T}{r_w^2S}\frac{S}{T}\frac{\partial s_D}{\partial t_D}$$

これを整理する

$$\frac{\partial^2 s_D}{\partial r_D^2}+\frac{1}{r_D}\frac{\partial s_D}{\partial r_D}=\frac{\partial s_D}{\partial t_D} \tag{8}$$

I.C.および B.C.についても無次元化を適用する。

I.C.　t_D=0 において，$s_D(r_D, t_D)=0$　(9)

B.C.　$r_D\to\infty$において，$s_D(r_D, t_D)=0$　(10)

また，t_D=0 において，$s_D(r_D=1, t_D=0)=1$　(11)

さらに，孔内外の水位差によって試験孔を出入りする流量とこれに伴う孔内水位変動量には以下の関係がある。

$$2\pi T r_w s_0 \frac{1}{r_w} r_D \left.\frac{ds_D}{dr_D}\right|_{r_D=1} = C_w \frac{s_0 T}{r_w^2 S}\frac{ds_{wD}}{dt_D} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} r_D \left.\frac{ds_D}{dr_D}\right|_{r_D=1} &= \frac{C_w}{2\pi T}\frac{T}{r_w^2 S}\frac{ds_{wD}}{dt_D} = \frac{C_w}{2\pi}\frac{1}{r_w^2 S}\frac{ds_{wD}}{dt_D} \\ &= \frac{1}{2\alpha}\frac{ds_{wD}}{dt_D} \end{aligned} \tag{13}$$

(3) 解法

1）Laplace 変換による解法

この問題を Cooper ら[1]は Laplace 変換を用いて解いた。

$$\frac{d^2\overline{s_D}}{dr_D{}^2} + \frac{1}{r_D}\frac{d\overline{s_D}}{dr_D} = \left\{p\overline{s_D} - s_D(t_D=0)\right\} \tag{14}$$

ここで，p は Laplace 変数である。また，$s(t=0)=0$ より以下となる。

$$\frac{d^2\overline{s_D}}{dr_D{}^2} + \frac{1}{r_D}\frac{d\overline{s_D}}{dr_D} - p\overline{s_D} = 0 \tag{15}$$

$$\begin{aligned} r_D \left.\frac{d\overline{s_D}}{dr_D}\right|_{r_D=1} &= \frac{1}{2\alpha}\frac{d\overline{s_{wD}}}{dt_D} \\ &= \frac{1}{2\alpha}\left[p\overline{s_{wD}} - s_{wD}(t_D=0)\right] = \frac{1}{2\alpha}\left[p\overline{s_{wD}} - 1\right] \end{aligned} \tag{16}$$

この一般解は，以下となる（Carslaw and Jaegaer, 1959）[4]。

$$\overline{s_D} = AI_0\left(\sqrt{p}r_D\right) + BK_0\left(\sqrt{p}r_D\right) \tag{17}$$

ここで，A. B は定数項である。関数 I_0 および K_0 はそれぞれ第一および二種修正 0 次ベッセル関数である。

r_D→∞をとると，関数 I_0(x)→無限大となり，$\overline{s_D}$ →0 であるためには A=0 でなければならず，よって以下となる。

$$\overline{s_D} = BK_0\left(\sqrt{p}r_D\right) \tag{18}$$

ここで，以下の微分を導く

$$\frac{d\overline{s_D}}{dr_D} = -B\sqrt{p}K_1\left(\sqrt{p}r_D\right) \tag{19}$$

また，試験孔内外で水位に差はない，即ち，井戸壁面のスキンはないとすると以下である。

$$r_D \left.\frac{d\overline{s_D}}{dr_D}\right|_{r_D=1} = \frac{1}{2\alpha}\left[p\overline{s_D} - 1\right]_{r_D=1} \tag{20}$$

$$-B\sqrt{p}r_D K_1\left(\sqrt{p}r_D\right)\Big|_{r_D=1} = \frac{1}{2\alpha}\left[BpK_0\left(\sqrt{p}r_D\right) - 1\right]_{r_D=1} \tag{21}$$

$$-B\sqrt{p}K_1\left(\sqrt{p}\right) = \frac{1}{2\alpha}\left[BpK_0\left(\sqrt{p}\right) - 1\right]$$

$$-B\cdot 2\alpha\sqrt{p}K_1\left(\sqrt{p}\right)\Big|_{r_D=1} = BpK_0\left(\sqrt{p}\right) - 1$$

$$B=\frac{1}{pK_0\left(\sqrt{p}\right)+2\alpha\sqrt{p}K_1\left(\sqrt{p}\right)} \tag{22}$$

よって，以下の解を得る

$$\overline{s_D}=\frac{K_0\left(\sqrt{p}r_D\right)}{pK_0\left(\sqrt{p}\right)+2\alpha\sqrt{p}K_1\left(\sqrt{p}\right)} \tag{23}$$

着目点を孔内に限定するなら，r_D=1 となり以下を得る。

$$\overline{s_D}=\frac{K_0\left(\sqrt{p}\right)}{pK_0\left(\sqrt{p}\right)+2\alpha\sqrt{p}K_1\left(\sqrt{p}\right)} \tag{24}$$

2) 逆 Laplace 変換による解法

Carslaw and Jaeger（1959) [4] でこの式の逆 Laplace 変換が紹介されており，その解は積分形で示されている。JGS 基準解説では任意 r_D および r_D=1（試験孔内）に対応した s_D の式が掲載されているが，

$$s_D=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\exp\left(-y^2t_D\right)g(y)}{\Delta y}dy \tag{25}$$

ここで，$g(y)$および Δy は以下である。

$$g(y)=J_0(yr_D)\left[yY_0(y)-2\alpha Y_1(y)\right]-Y_0(yr_D)\left[yJ_0(y)-2\alpha J_1(y)\right] \tag{26}$$

$$\Delta y=\left[yY_0(y)-2\alpha Y_1(y)\right]^2+\left[yJ_0(y)-2\alpha J_1(y)\right]^2$$

また，関数 J_0：第一種 0 次ベッセル関数，J_1：第一種 1 次ベッセル関数，Y_0：第二種 0 次ベッセル関数，Y_1：第二種 1 次ベッセル関数。

上式を試験孔内の水位低下量のみの式，即ち r_D=1，に簡略化すると以下となる。

$$\begin{aligned}g(y)\big|_{r_D=1}&=J_0(y)\left[yY_0(y)-2\alpha Y_1(y)\right]-Y_0(y)\left[yJ_0(y)-2\alpha J_1(y)\right]\\&=yJ_0(y)Y_0(y)-2\alpha J_0(y)Y_1(y)-yY_0(y)J_0(y)+2\alpha Y_0(y)J_1(y)=2\alpha\left[Y_0(y)J_1(y)-J_0(y)Y_1(y)\right]\end{aligned} \tag{27}$$

以下の誘導は，Carlaw ら [4]にも Cooper ら [1]にも具体的に書かれていないが，上式の[　]内の関数 J,Y については，Abramobitz ら [5]の公式集に以下の関係が紹介されている。

$$J_{\nu+1}(y)Y_\nu(y)-J_\nu(y)Y_{\nu+1}(y)=\frac{2}{\pi y} \tag{28}$$

上式で ν=0 とすれば当該の式が得られ，以下である。

$$2\alpha\left[Y_0(y)J_1(y)-J_0(y)Y_1(y)\right]=\frac{4\alpha}{\pi y} \tag{29}$$

よって，r_D=1 に対応した次式が得られる。

$$s_{Dw}=\frac{8\alpha}{\pi^2}\int_0^\infty\frac{\exp\left(-y^2t_D\right)}{y\Delta y}dy \tag{30}$$

（いずれにしても）この式を数値にするのは非常に面倒であり，Cooper ら [1]が用意した限られた井戸貯留比 α および無次元時間項 β に対する数表 $s_D(=s/s_0)$を使うことが多い。

$$t_D=\frac{Tt}{Sr_w^2}\quad \alpha=\frac{\pi Sr_w^2}{C_w}\quad \beta=\alpha t_D=\frac{\pi Tt}{C_w} \qquad \text{再掲(6)}$$

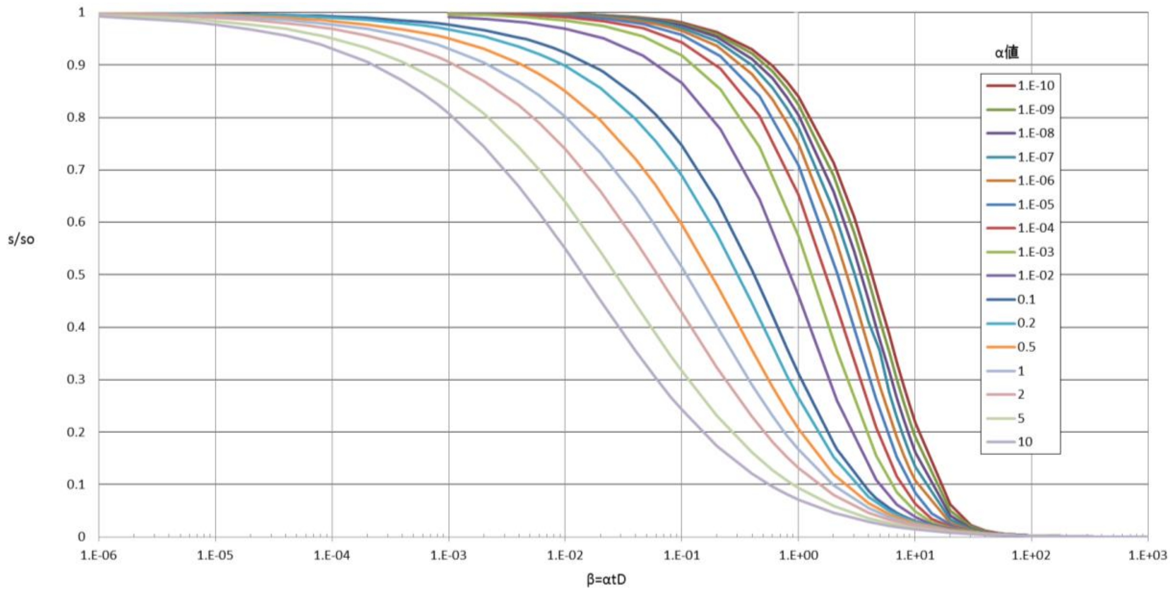

図-1　α, β に対する s_D

【参考文献】

1）　Cooper,H.H.Jr., Bredehoeft, J.D. and Papadopulos, I.S.: Response of a finite-diameter well to an instantaneous charge of water, Water resources research, Vol.3, No.1, pp.263–269, 1967.

2）　Papadopulos,S.S., Bredehoeft, J.D. and Cooper , H.H. Jr.: On the analysis of 'slug test' data, Water Resources Research, Vol.9, No.4, pp.1087–1089, 1973.

3）　Bredehoeft,J.D. and Papadolulos , S.S, : A method for determinating the hydraulic properties of tight formation, Water Resources Research, Vol.16, No.1, pp.233-2389, 1980.

4）　Carslaw,H.S. and Jaeger,J.C.: Conduction of heat in solids (2nd edition), Oxford, p.342, 1959.

5）　Abramowitz,M. and Stegun, I. A., Handbook of mathematical functions, Dover, p.360, 1972.