理論解数値算定精度の向上

資料 2-05 で説明したスラグ試験の背景となる理論解では積分式のままであり，この式から理論値を求めることは一般的ではない。しかし，Laplace 変換で得られた解を数値的逆 Laplace 変換する場合があり，このときに修正第一・二種ベッセル関数値を求めることとなる。数値的逆 Lapalace 変換を実施すると，早い時間で変換ルーチンが収束しない，あるいは計算精度が劣る（精度を低くするため）といった問題が生じる。元来，拡散方程式を解いているため，時間 0 の解は初期条件として与える以外存在しない。このことから，比較的早い時間での解を得ることを諦めがちとなる。しかし，前出の$\overline{s_D}$式をみると，早い時間では Laplace 因子 p が大きくなり，ベッセル関数 K_0 および K_1 がいずれも 0 に漸近する。このため，計算機内では 0 割状態となることで，変換ルーチンが適切に稼動できない事態が生じる。そこで，これらベッセル関数の近似式を用い，できるだけ 0 割が生じる時間を早いところにシフトさせる工夫を行う。
以下の，関数式は z が十分に大きな場合の近似式である。

$$\begin{aligned}K_0(z) &\approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\exp(-z)\left\{1-\frac{1}{8z}+\frac{9}{2!(8z)^2}-\frac{(9)(25)}{3!(8z)^3}+\cdots\cdots\right\}\\&=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\exp(-z)\left\{1-\frac{1}{8z}+\frac{9}{128z^2}-\frac{225}{3072z^3}+\cdots\cdots\right\}=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\exp(-z)f_{k0}(z)\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}K_1(z) &\approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\exp(-z)\left\{1+\frac{3}{8z}-\frac{(3)(5)}{2!(8z)^2}+\frac{(3)(5)(21)}{3!(8z)^3}+\cdots\cdots\right\}\\&=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\exp(-z)\left\{1+\frac{3}{8z}-\frac{15}{128z^2}+\frac{315}{3072z^3}+\cdots\cdots\right\}=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\exp(-z)f_{k1}(z)\end{aligned} \tag{2}$$

これを，$\overline{s_D}$ に代入し整理すると以下のようになる。

$$\begin{aligned}\overline{s_D} &= \frac{K_0\left(\sqrt{p}\,r_D\right)}{pK_0\left(\sqrt{p}\right)+2\alpha\sqrt{p}K_1\left(\sqrt{p}\right)} \approx \frac{\sqrt{\dfrac{\pi}{2r_D\sqrt{p}}}\exp\left(-r_D\sqrt{p}\right)f_{k0}\left(r_D\sqrt{p}\right)}{p\sqrt{\dfrac{\pi}{2\sqrt{p}}}\exp\left(-\sqrt{p}\right)f_{k0}\left(\sqrt{p}\right)+2\alpha\sqrt{p}\sqrt{\dfrac{\pi}{2\sqrt{p}}}\exp\left(-\sqrt{p}\right)f_{k1}\left(\sqrt{p}\right)}\\&=\frac{\sqrt{\dfrac{1}{r_D}}\exp\left(-r_D\sqrt{p}+\sqrt{p}\right)f_{k0}\left(r_D\sqrt{p}\right)}{pf_{k0}\left(\sqrt{p}\right)+2\alpha\sqrt{p}\,f_{k1}\left(\sqrt{p}\right)}\end{aligned} \tag{3}$$

さらに，r_D=1 とすると以下となる。

$$\overline{s_D} \approx \frac{\exp(0)f_{k0}\left(\sqrt{p}\right)}{pf_{k0}\left(\sqrt{p}\right)+2\alpha\sqrt{p}\,f_{k1}\left(\sqrt{p}\right)}=\frac{f_{k0}\left(\sqrt{p}\right)}{pf_{k0}\left(\sqrt{p}\right)+2\alpha\sqrt{p}\,f_{k1}\left(\sqrt{p}\right)} \tag{4}$$

また，同様に$\overline{s_D}/dt$ 値についても以下の簡略化が見込める。

$$p\overline{s_D} \approx p\cdot\frac{\sqrt{\dfrac{1}{r_D}}\exp\left(-r_D\sqrt{p}+\sqrt{p}\right)f_{k0}\left(r_D\sqrt{p}\right)}{pf_{k0}\left(\sqrt{p}\right)+2\alpha\sqrt{p}\,f_{k1}\left(\sqrt{p}\right)}=\frac{\sqrt{\dfrac{1}{r_D}}\exp\left(-r_D\sqrt{p}+\sqrt{p}\right)f_{k0}\left(r_D\sqrt{p}\right)}{f_{k0}\left(\sqrt{p}\right)+\dfrac{2\alpha f_{k1}\left(\sqrt{p}\right)}{\sqrt{p}}} \tag{5}$$

r_D=1 では

$$p\overline{s_D} \approx \frac{\exp(0) f_{k0}\left(\sqrt{p}\right)}{f_{k0}\left(\sqrt{p}\right) + \frac{2\alpha f_{k1}\left(\sqrt{p}\right)}{\sqrt{p}}} = \frac{f_{k0}\left(\sqrt{p}\right)}{f_{k0}\left(\sqrt{p}\right) + \frac{2\alpha f_{k1}\left(\sqrt{p}\right)}{\sqrt{p}}} \tag{6}$$

このように，p の入った exp 項がなくなることで，この処理を行う前よりも有意な算定ができる範囲の拡大が期待できる。