JGS1316 および E-19 法(USGS)で用いる理論式の誘導

地表から削孔された井戸の水位を一定に保った場合の定常注水浸透挙動は，Glover によって誘導されている。この誘導においては，以下の点に注意する必要がある。

1) 試験孔注水区間は地下水面より上位に位置しており，このため試験前あるいは試験中の注水によって，試験孔周辺の地盤は現場飽和状態にすることとなる。これにより，自然状態の飽和状態に比べ短時間の注水によるため土塊空隙内に気泡が残留するなどの懸念があり，この試験によって得られる透水係数は飽和透水係数より，小さく見積もられる可能性がある。
2) したがって，得られると透水係数は現場透水係数とする。
3) 定常状態浸透における支配方程式は，飽和地盤と同様に自然水位からの水位差 s を変数とした以下のラプラス方程式で表すことができるとする。

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial s}{\partial\rho}\right)=0 \tag{1}$$

4) 不飽和地盤で見られる負の圧力水頭(サクション)の影響は考慮されない。
5) 試験孔から地盤への浸透が試験孔の中心軸上に無限数配置した点源によってできる線源から放射状に生じ，かつ点源の強さが試験孔内の水深に比例すると仮定する。

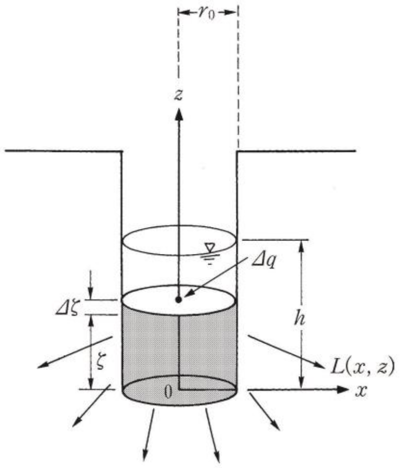

図-1　点源注水試験

図-1 の z=ζ, x=0(z 軸上)の任意の点 P(z 座標ζ)に点源流量強度 q [L^3/TL]（単位長さあたりの流量）を与えるとする。ここで，地下水面は試験孔よりも十分に下位にあると考えているので，孔内の水面の位置と点源位置が離れているほど点源からの流量強度 q は大きくなる。つまり，q は孔内水深 h に比例するものと考えると次のように表すことができる。

$$dq=q\cdot d\varsigma=a(h-\varsigma)d\varsigma \tag{2}$$

ここで，a は試験孔形状などの条件，地盤の透水係数で決まる試験ごとの定数とする。このように定義すると試験孔全体でかかる総流量 Q[L^3/T]は以下の積分となる。

$$\begin{aligned}Q&=\int_0^h dq=\int_0^h q\cdot d\varsigma=\int_0^h a(h-\varsigma)d\varsigma\\&=a\left[h\varsigma-\frac{\varsigma^2}{2}\right]_0^h=a\left(h^2-\frac{h^2}{2}\right)=\frac{ah^2}{2}\end{aligned} \tag{3}$$

よって，dq と Q の比率は以下となる。

$$\frac{dq}{Q}=\frac{(h-\varsigma)d\varsigma}{h^2/2} \tag{4}$$

上式を，JGS 基準の解説では検討の始めに持ってきている。また，点源 dq によって点座標 (x,z)に生じる水頭増加を dH とすると Darcy 則からにより以下となる。

$$dq=\frac{KdH}{\rho}\cdot 4\pi\rho^2=4\pi\rho K\cdot dH \tag{5}$$

ここで，ρ：点源から座標(x,z)までの距離であり，以下と定義される。

$$\rho=\sqrt{x^2+(z-\varsigma)^2} \tag{6}$$

これらから，dH について整理すると以下となる。

$$\frac{1}{Q}4\pi\rho KdH=\frac{(h-\varsigma)d\varsigma}{h^2/2} \tag{7}$$

よって，

$$\begin{aligned}dH&=\frac{Q(h-\varsigma)d\varsigma}{4\pi\rho Kh^2/2}=\frac{Q(h-\varsigma)d\varsigma}{2\pi\rho Kh^2}\\&=\frac{Q}{2\pi Kh^2}\frac{(h-\varsigma)d\varsigma}{\sqrt{x^2+(z-\varsigma)^2}}\end{aligned} \tag{8}$$

$0\leq\varsigma\leq h$ の範囲で積分する。

$$\int_0^H dH=\frac{Q}{2\pi Kh^2}\int_0^h\frac{(h-\varsigma)}{\sqrt{x^2+(z-\varsigma)^2}}d\varsigma \tag{9}$$

$$H=\frac{Q}{2\pi Kh^2}\left[(h-z)\left\{\sinh^{-1}\left(\frac{h-z}{x}\right)+\sinh^{-1}\left(\frac{z}{x}\right)\right\}-\sqrt{x^2+(h-z)^2}+\sqrt{x^2+z^2}\right] \tag{10}$$

ここで，$z=0$，$x=r_o$ で $H=h$ である。

$$\begin{aligned}h&=\frac{Q}{2\pi Kh^2}\left[h\left\{\sinh^{-1}\left(\frac{h}{r_0}\right)+\sinh^{-1}(0)\right\}-\sqrt{{r_0}^2+h^2}+\sqrt{{r_0}^2}\right]\\&=\frac{Q}{2\pi Kh^2}\left[h\cdot\sinh^{-1}\left(\frac{h}{r_0}\right)-\sqrt{{r_0}^2+h^2}+r_0\right]\end{aligned} \tag{11}$$

K について解くと以下となる。

$$\begin{aligned}K&=\frac{Q}{2\pi Kh^2}\left[\sinh^{-1}\left(\frac{h}{r_0}\right)-\sqrt{\frac{{r_0}^2+h^2}{h^2}}+\frac{r_0}{h}\right]\\&=\frac{Q}{2\pi Kh^2}\left[\sinh^{-1}\left(\frac{h}{r_0}\right)-\sqrt{\frac{{r_0}^2}{h^2}+1}+\frac{r_0}{h}\right]\end{aligned} \tag{12}$$

ここで，$\sinh^{-1}(x)=\log_e\left[x+\sqrt{x^2+1}\right]$ (13)

$$K=\frac{Q}{2\pi Kh^2}\left[\log_e\left[\frac{r_0}{h}+\sqrt{\frac{{r_0}^2}{h^2}+1}\right]-\sqrt{\frac{{r_0}^2}{h^2}+1}+\frac{r_0}{h}\right] \tag{14}$$

＜参考＞

Laplace 式の解は以下のように解かれている。

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial s}{\partial \rho}\right) = 0$$

$$\rho^2 \frac{\partial^2 s}{\partial \rho^2} + 2\rho \frac{\partial s}{\partial \rho} = 0 \qquad \text{(r1)}$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial s}{\partial \rho} = 0$$

より，一般解は

$$s = \frac{A}{\rho} + B \qquad \text{(r2)}$$

境界条件 $\rho \to \infty$, s=0

半径 ρ の球表面を通過する流量を q とする。

$$q = -4\pi\rho^2 K \frac{\partial s}{\partial \rho} \qquad \text{(r3)}$$

これを解くと以下となる。

$$s = \frac{q}{4\pi K\rho} \qquad \text{(r4)}$$

【参考文献】

1） Zangar, C. N.: Theory and problems of water percolation, United States Department of the Interior, Bureau of reclamation, pp.69-71, 1953.

2） U.S. Department of the Interior, Bureau of reclamation：Earth manual， 2nd Edition， pp.578～593， 1974.