Theis の井戸関数式の誘導

ここで扱う井戸関数式は Theis 式 $W(\lambda)$として知られる以下の指数積分関数である。

$$W(\lambda)=\int_{\lambda}^{\infty}\frac{\exp(-\lambda)}{\lambda}d\lambda \tag{1}$$

この関数式は，指数積分関数 $E_1(\lambda)$ として数学書では示されるものである。また，次式で示される第二種不完全ガンマ関数において，変数 ν=0 とした場合，全く同じ式形となる。

$$\Gamma(\nu,\lambda)=\int_{\lambda}^{\infty}\exp(-\lambda)\lambda^{\nu-1}d\lambda \tag{2-1}$$

$$\Gamma(0,\lambda)=\int_{\lambda}^{\infty}\exp(-\lambda)\lambda^{-1}d\lambda \tag{2-2}$$

このように当該式にはいくつかの呼称があるとともに，地下水学の分野では揚水試験法の拠り所となる基本式であることを覚えておきたい。以降の説明では，数学展開に終始することから，個々のパラメータの説明が足りなくなるため，ここで説明しておく。井戸関数 $W(\lambda)$は揚水試験では以下の関係式を有する。

$$s=\frac{Q}{4\pi T}W(\lambda) \tag{3-1}$$

$$\lambda=\frac{Sr^2}{4Tt} \tag{3-2}$$

ここで，s : 水位低下(あるいは上昇)量 [L]，Q : 一定揚水(あるいは注水)流量 [L^3/T]，T : 透水量係数 [L^2/T]，S : 貯留係数 [-], $T=bK$，b:層厚 [L]，K : 透水係数 [L/T]，$S=bSs$（あるいは，$=S_y$），S_y : 比算出率（あるいは有効間隙率$=n_e$）[-]，S_s:比貯留係数，r : 揚水（あるいは注水）井戸からの距離 [L]，t : 揚水開始後の経過時間 [T]である。

また，井戸及び帯水層には以下の初期及び境界条件が付加する。

a）帯水層厚さは一定
b）当該帯水層に上下隣接する地層からの（あるいは地層への）漏水供給（あるいは漏水供出）はない
c）帯水層無限遠境界を有す
d）揚水井戸は無限小径
e）初期水位（水頭）は一定

ここでは，以下の構成で Theis 井戸関数式の誘導過程を説明する。

(1) 支配方程式の誘導（資料 3-02：次ページ）
(2) Boltzman 変換を用いた誘導（その 1）（資料 3-03）
(3) Boltzman 変換を用いた誘導（その 2）（資料 3-03）
(4) Laplace 変換を用いた誘導（資料 3-04）
(5) その他の誘導の調査状況（資料 3-03）
(6) 曲線一致法における Theis 井戸関数の活用（資料 3-03）

Theis 井戸関数式の誘導過程　(1)支配方程式の誘導

（連続の式）半径 r の円周 $2\pi r$ が厚さ dr をもつ円環体積内で，単位時間当たりに dh/dt の水頭変化に対する媒体内の貯留変化量を dQ とする。ここで，h は水頭（あるいは水位）を表す。

$$\partial Q = -2\pi r S_S b \frac{\partial h}{\partial t} \partial r \tag{1.1}$$

上式では，水頭 h が時間とともに減少，即ち $\partial h/\partial t<0$ のとき，流量 Q は増加（正符号）としている。さらに整理すると，以下となる。

$$\frac{\partial Q}{\partial r} = -2\pi r S_S b \frac{\partial h}{\partial t} \tag{1.2}$$

（運動の式）円環の内外側で Darcy 則を適合させると以下となる。ここで，流量 Q は揚水を正符号にとる。このとき，帯水層内は揚水井戸に向かって（距離 r の大きい方から小さい方に向かって）流れることとする。

$$Q = -2\pi r K b \frac{\partial h}{\partial r} \tag{1.3}$$

両式から Q を消去すると以下となる。

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\left(-2\pi r K b \frac{\partial h}{\partial r}\right) &= -2\pi r S_S b \frac{\partial h}{\partial t} \\
-2\pi K b \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial h}{\partial r}\right) &= -2\pi r S_S b \frac{\partial h}{\partial t} \\
K \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial h}{\partial r}\right) &= r S_S \frac{\partial h}{\partial t} \\
\frac{K}{S_S} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial h}{\partial r}\right) &= r \frac{\partial h}{\partial t} \\
\frac{K}{S_S}\left(\frac{\partial h}{\partial r} + r \frac{\partial^2 h}{\partial r^2}\right) &= r \frac{\partial h}{\partial t}
\end{aligned}\right\} \text{展開過程を示しておく}$$

まとめると以下となる。

$$\frac{K}{S_S}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\partial^2 h}{\partial r^2}\right) = \frac{\partial h}{\partial t} \tag{1.4}$$

また，初期水位は一定で $h=H_o$ とし，さらに水頭低下量 s（$=H_o-h$）を用いると以下となる。

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial (H_0 - s)}{\partial t} &= \frac{K}{S_S}\left(\frac{\partial^2 (H_0 - s)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial (H_0 - s)}{\partial r}\right) \\
-\frac{\partial s}{\partial t} &= \frac{K}{S_S}\left(-\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\right)
\end{aligned}\right\}$$

まとめると以下となる。

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{K}{S_S}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\right) \tag{1.5}$$

以上の様に，水位（水頭）h については(1.4)式，水位低下量 s については(1.5)式が支配方程式としてそれぞれが誘導できた。

【参考文献】

1)　赤井浩一：土質力学，朝倉書店，pp. 43-44，1966.