資料 3-03

Theis 井戸関数式の誘導過程　(2)Boltzman 変換を用いた誘導（その 1）

以下の水位低下量 s についての支配方程式から誘導を始める。

$$\frac{\partial s}{\partial t}=\frac{K}{S_S}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\right) \tag{1}$$

初期条件(I.C.)および境界条件(B.C.)は以下である。

I.C.　$s=0$　for　$t=0$　(2)

B.C.　$s=0$　for　$r\to\infty$　(3.1)

$Q=Q_0$　for　$r\to 0$　(3.2)

ここで，距離 r と時間 t を含む以下の項を定義する。この定義による変数の変換を Boltzman 変換と呼んでいる。

$$y\equiv\frac{r}{2}\sqrt{\frac{S_S}{Kt}}\quad ,\ \text{よって,}\ \ r=2y\sqrt{\frac{Kt}{S_S}} \tag{4}$$

ここで何故この問題でこのような変換を用いるかの説明がなされているものはなく，最終的な結果が見えていたり，同様の問題に適用可能と考えられていたりするようであり，汎用的な説明を付加することはできない。しかし，全く同じ変換は，野満・山下[2)]によっても紹介されている。

さて，ここで支配方程式にある r および t による微分項を(4)式の変換に用いた変数 y による微分を考えてみる。

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial y}{\partial t}\frac{d}{dy}=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{S_S}{K}}\cdot r\cdot t^{-\frac{3}{2}}\frac{d}{dy}=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{S_S}{Kt}}\cdot r\cdot t^{-1}\frac{d}{dy}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial y}{\partial t}\frac{d}{dy}=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{S_S}{Kt}}\cdot\frac{r}{t}\frac{d}{dy}$$

$$=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{S_S}{Kt}}\cdot\frac{2y}{t}\sqrt{\frac{Kt}{S_S}}\frac{d}{dy}=-\frac{y}{2t}\frac{d}{dy}$$

よって，$\dfrac{\partial}{\partial t}=-\dfrac{y}{2t}\dfrac{d}{dy}$　(5.1)

$$\frac{\partial}{\partial r}=\frac{\partial y}{\partial r}\frac{d}{dy}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S_S}{Kt}}\frac{d}{dy}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S_S}{Kt}}\frac{d}{dy} \tag{5.2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}=\frac{1}{2y}\sqrt{\frac{S_S}{Kt}}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S_S}{Kt}}\frac{d}{dy}=\frac{S_S}{Kt}\frac{1}{4y}\frac{d}{dy} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial r^2}&=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial y}{\partial r}\frac{d}{dy}\right)\\&=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S_S}{Kt}}\frac{d}{dy}\right)\frac{d}{dy}=\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S_S}{Kt}}\right)^2\frac{d^2}{dy^2}=\frac{1}{4}\frac{S_S}{Kt}\frac{d^2}{dy^2}\end{aligned} \tag{5.4}$$

したがって，(1)式の各微分項は以下のようになる。

$$\frac{\partial s}{\partial t}=-\frac{y}{2t}\frac{ds}{dy},\quad \frac{\partial^2 s}{\partial r^2}=\frac{1}{4}\frac{S_S}{Kt}\frac{d^2 s}{dy^2},\quad \frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}=\frac{S_S}{Kt}\frac{1}{4y}\frac{ds}{dy}$$

これらを，(1)式に代入する。

$$-\frac{y}{2t}\frac{ds}{dy}=\frac{K}{S_S}\left(\frac{1}{4}\frac{S_S}{Kt}\frac{d^2 s}{dy^2}+\frac{S_S}{Kt}\frac{1}{4y}\frac{ds}{dy}\right)$$

$$-\frac{y}{1}\frac{ds}{dy}=\left(\frac{1}{2}\frac{d^2 s}{dy^2}+\frac{1}{2y}\frac{ds}{dy}\right)$$

$$-2y\frac{ds}{dy}=\left(\frac{d^2s}{dy^2}+\frac{1}{y}\frac{ds}{dy}\right)$$

よって，以下となる。

$$\frac{d^2s}{dy^2}+\left(\frac{1}{y}+2y\right)\frac{ds}{dy}=0 \tag{6}$$

このように支配方程式は，偏微分形(1)式から常微分形(6)式に変換できたことになる。
ここで，赤井[1)]はこれを y について 1 回積分すると以下を得るとしている。

$$\frac{ds}{dy}=C\frac{\exp\left(-y^2\right)}{y} \quad ,\ \text{C：積分定数} \tag{7}$$

この誘導を試みる。ここで，$z\equiv\dfrac{ds}{dy}$ とする。

定義 z を(6)式に代入し整理する。

$$\frac{dz}{dy}=-\left(\frac{1}{y}+2y\right)z$$

これをさらに整理すると以下となる。

$$\frac{dz}{z}=-\left(\frac{1}{y}+2y\right)dy$$

これを，両辺それぞれ積分する。

$$\begin{aligned}\log_e(z)&=-\log_e(y)-y^2+C_1\\&=-\log_e(y)+\log_e e^{-y^2}+\log_e e^{C_1}\\&=\log_e\left(\frac{1}{y}\right)+\log_e e^{-y^2}+\log_e e^{C_1}\\&=\log_e\left(\frac{e^{C_1}e^{-y^2}}{y}\right)\end{aligned}$$

よって，C=exp(C_1)とすると，z は以下となる。

$$z=\frac{e^{C_1}e^{-y^2}}{y}=C\cdot\frac{e^{-y^2}}{y}$$

これで，(7)式の誘導が確認できたと考えられるが，再確認のため，上式を微分して元に戻ることを確認する。上式の微分は以下のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{d^2s}{dy^2}&=C\frac{d}{dy}\left\{\frac{\exp\left(-y^2\right)}{y}\right\}\\&=C\left\{-\frac{\exp\left(-y^2\right)}{y^2}-2y\frac{\exp\left(-y^2\right)}{y}\right\}\end{aligned}$$

ここで，(7)式から得た以下を上式に代入する。

$$\exp\left(-y^2\right)=\frac{y}{C}\frac{ds}{dy}$$

$$\frac{d^2s}{dy^2}=C\left\{-\frac{y}{Cy^2}\frac{ds}{dy}-2y\frac{y}{Cy}\frac{ds}{dy}\right\}$$
$$=\left\{-\frac{1}{y}\frac{ds}{dy}-2y\frac{ds}{dy}\right\}=-\left\{\frac{1}{y}+2y\right\}\frac{ds}{dy}$$

これを整理すると積分前に戻ることが確認できた。

さらに，(7)式を積分すると以下となる。

$$\int ds=C\int\frac{\exp\left(-y^2\right)}{y}dy$$

ここで，I.C.では t=0 であり，変数 y→∞となること，

これに加えて，B.C.のうち，r→∞で，いずれも s→0 を考慮している。

$$s=-C\int_y^\infty\frac{\exp\left(-y^2\right)}{y}dy \tag{8}$$

次に B.C.を導入する。

$r\to 0\quad Q=Q_0$　(一定揚水量)

となるように積分定数 C を定めるために，(8)式を(9)式に代入する。

$$Q=-2\pi rKb\frac{\partial h}{\partial r} \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}=\frac{\partial y}{\partial r}\frac{d}{dy}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S_S}{Kt}}\frac{d}{dy}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S_S}{Kt}}\frac{d}{dy} \qquad \text{(5.2)再掲}$$

$$Q_0=-2\pi rbK\left.\frac{\partial(H-s)}{\partial r}\right|_{r=0}=+2\pi rbK\cdot\left.\left(-C\cdot\frac{\exp\left(-y^2\right)}{y}\frac{r}{2}\sqrt{\frac{S_S}{Kt}}\right)\right|_{r=0}=-2\pi bKC$$

$$\therefore C=\frac{-Q_0}{2\pi bK}$$

よって求める解は以下となる。

$$s=\frac{Q_0}{2\pi bK}\int_y^\infty\frac{\exp\left(-y^2\right)}{y}dy \tag{10}$$

さらに以下とする。

$$\lambda=y^2=\frac{S_S r^2}{4Kt} \tag{11}$$

この置換を行うと，$\frac{d\lambda}{dy}=2y$，であることから，以下のように誘導できた。

$$s=\frac{Q_0}{2\pi bK}\int_\lambda^\infty\frac{\exp(-\lambda)}{y\cdot 2y}d\lambda=\frac{Q_0}{4\pi bK}\int_\lambda^\infty\frac{\exp(-\lambda)}{\lambda}d\lambda$$

【参考文献】

1）　赤井浩一：土質力学，朝倉書店，pp.43-44，1966.

2）　野満隆治，山下馨：井戸理論の一進展（第 2 報）竪井の揚水開始及び停止に伴ふ付近水位変化と地層の弾性率，地球物理，Vol.7，No.1，pp.21-40，1943.

Theis 井戸関数式の誘導過程　(3)Boltzman 変換を用いた誘導（その 2）

ここでは，前掲とは異なる Boltzman 変換式を用いた場合の展開を説明する。本解説内容は，米国アリゾナ大学水資源学課の Neuman 教授の講義ノート(HWR503 クラス)[2]を主に参考にしたが，同じ変換式は Streltsova が著書[3]でも紹介している。

ここでは，(1)式の水位低下量についての支配方程式を用いる。支配方程式は展開時の簡素化のため，以下で定義される水理拡散係数 α を用いて書き換えられている。

$$\frac{\partial s}{\partial t}=\frac{K}{S_S}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\right) \tag{1}$$

水理拡散係数： $\alpha=\frac{K}{S_S}=\frac{T}{S}$　　(2. 1)

$$\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial s}{\partial t} \tag{2. 2}$$

I.C.　$s(r,0)=0$　　(3)

B.C.　$\lim_{r\to\infty} s(r,t)=0$　　(4)

$\lim_{r\to 0} 2\pi rbK\frac{\partial s}{\partial r}=-Q_0$　ここで，Q_0 は一定　　(5)

ここで用いるボルツマン変換式は以下である

$y=\frac{r^2}{4\alpha t}$ とし，s を y の関数 $s(y)$ とする　　(6)

$$\frac{\partial s}{\partial t}=\frac{ds}{dy}\frac{dy}{dt}=-\frac{r^2}{4\alpha t^2}\frac{ds}{dy}$$

$$\frac{\partial s}{\partial r}=\frac{ds}{dy}\frac{dy}{dr}=\frac{2r}{4\alpha t}\frac{ds}{dy}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}&=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{ds}{dy}\frac{dy}{dr}\right)=\frac{dy}{dr}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{ds}{dy}\right)+\frac{ds}{dy}\frac{\partial^2 y}{\partial r^2}\\&=\frac{\partial y}{\partial r}\frac{d^2 s}{dy^2}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{ds}{dy}\frac{\partial^2 y}{\partial r^2}\\&=\frac{d^2 s}{dy^2}\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\frac{ds}{dy}\frac{\partial^2 y}{\partial r^2}=\left(\frac{2r}{4\alpha t}\right)^2\frac{d^2 s}{dy^2}+\frac{2}{4\alpha t}\frac{ds}{dy}\end{aligned}$$

$$\frac{r^2}{4\alpha^2 t^2}\frac{d^2 s}{dy^2}+\frac{2}{4\alpha t}\frac{ds}{dy}+\frac{1}{r}\left(\frac{2r}{4\alpha t}\right)\frac{ds}{dy}=\frac{1}{\alpha}\left(-\frac{r^2}{4\alpha t^2}\right)\frac{ds}{dy}$$

ここで，$y=\frac{r^2}{4\alpha t}$ より，

$$\frac{1}{\alpha t}y\frac{d^2 s}{dy^2}+\frac{2}{r^2}y\frac{ds}{dy}+\frac{2}{r^2}y\frac{ds}{dy}=-\frac{1}{\alpha t}y\frac{ds}{dy}$$

$$y\frac{d^2 s}{dy^2}+\frac{4\alpha t}{r^2}y\frac{ds}{dy}+y\frac{ds}{dy}=0$$

$$y\frac{d^2 s}{dy^2}+\frac{1}{y}y\frac{ds}{dy}+y\frac{ds}{dy}=0$$

$$y\frac{d^2 s}{dy^2}+(1+y)\frac{ds}{dy}=0 \tag{7}$$

I.C.と B.C.(@r→∞)を組み合わせると以下となる。

$$\lim_{y\to\infty} s(y)=0 \tag{8}$$

また，井戸では以下となる。

$$2\pi rbK\left.\frac{\partial s}{\partial r}\right|_{r\to 0}=-Q\ ;\ \frac{r}{2}\left.\frac{\partial s}{\partial r}\right|_{r\to 0}=-\frac{Q}{4\pi bK} \tag{9}$$

$$\frac{r}{2}\frac{2r}{4\alpha t}\left.\frac{ds}{dy}\right|_{y\to 0}=-\frac{Q}{4\pi bK}\ ;\ \lim_{y\to 0} y\frac{ds}{dy}=-\frac{Q}{4\pi bK} \tag{10}$$

ここで，$s'=\frac{ds}{dy}$ を用いる

$$y\frac{ds'}{dy}+(1+y)s'=0$$

$$\frac{ds'}{dy}+\left(\frac{1}{y}+1\right)s'=0$$

$$\frac{1}{s'}ds'+\left(\frac{1}{y}+1\right)dy=0$$

これを解くと以下となる。

$$\ln(s')+\ln(y)+y+C=0$$

これを整理する。

$$\ln(s')=-\ln(y)-y-C=0$$

よって，以下となる。

$$s'=\exp\{-\ln(y)-y-C\}$$

$$s'=\exp\{-\ln(y)-y\}\exp(-C)$$

$$s'=C_1\exp\{-\ln(y)-y\}$$

$$s'=C_1\exp\{-\ln(y)\}\exp(-y)$$

$$\frac{ds}{dy}=s'=\frac{C_1}{y}\exp(-y) \tag{11}$$

よって，

$$y\frac{ds}{dy}=C_1\exp(-y)$$

ここで，井戸境界 B.C.(@y→0)を導入する。

$$\lim_{y\to 0} y\frac{ds}{dy}=\lim_{y\to 0} C_1\exp(-y)=C_1=\frac{-Q}{4\pi bK}$$

これを(11)式に代入する。

$$\frac{ds}{dy}=\frac{-Q}{4\pi bK}\frac{\exp(-y)}{y}$$

これを積分する

$$s(y)-s(\infty)=\frac{-Q}{4\pi bK}\int_{\infty}^{y}\frac{\exp(-y)}{y}dy \tag{12}$$

ここで，$s(\infty)=0$

よって，

$$
\begin{aligned}
s(y) &= \frac{-Q}{4\pi bK}\int_{\infty}^{y}\frac{\exp(-y)}{y}dy \\
&= \frac{Q}{4\pi bK}\int_{y}^{\infty}\frac{\exp(-y)}{y}dy \qquad (13) \\
&= \frac{Q}{4\pi bK}\int_{1/4t_S}^{\infty}\frac{\exp(-y)}{y}dy = \frac{Q}{4\pi bK}E_1(1/4t_S)
\end{aligned}
$$

ここで，$t_S = \dfrac{\alpha t}{r^2} = \dfrac{1}{4y}$

【参考文献】

1） 赤井浩一：土質力学，朝倉書店，pp.43-44，1966.
2） Neuman, S.P.: HWR603 class-notes, University of Arizona, pp.28-30, 1994.
3） Streltsova, T.D.: Well testing in heterogeneous formation, John Wiley & Sons, 1983.

Theis 井戸関数式の誘導過程　(5)Bear(1979)の誘導

Batu(1998)は Bear(1979)の誘導として以下を紹介している以下の支配方程式の一般解の提示から誘導は始まる。

$$\frac{\partial s}{\partial t}=\frac{T}{S}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\right)$$

一般解は以下である。

$$s=\frac{A}{t}\exp(-u)\quad u=\frac{Sr^2}{4Tt}$$

ここで，A：定数。
この結果を順に確認しておく。

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{A}{t}\exp(-u)\right]=\frac{A}{t}\frac{du}{dr}\cdot\frac{d}{du}\exp(-u)=-\frac{A}{t}\frac{2Sr}{4Tt}\exp(-u)=-\frac{ASr}{2Tt^2}\exp(-u)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[\frac{A}{t}\exp(-u)\right]=\frac{A}{t}\frac{\partial}{\partial r}\left[-\frac{Sr}{2Tt}\exp(-u)\right]=\frac{A}{t}\left[-\frac{S}{2Tt}\exp(-u)+\frac{Sr}{2Tt}\frac{Sr}{2Tt}\exp(-u)\right]$$

$$=-\frac{AS}{2Tt^2}\exp(-u)+\frac{AS^2r^2}{4T^2t^3}\exp(-u)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{A}{t}\exp(-u)\right]=\frac{-A}{t^2}\exp(-u)+\frac{A}{t}\frac{du}{dt}\cdot\frac{d}{du}\exp(-u)=\frac{-A}{t^2}\exp(-u)+\frac{A}{t}\frac{Sr^2}{4Tt^2}\cdot\exp(-u)$$

$$=\frac{-A}{t^2}\exp(-u)+\frac{ASr^2}{4Tt^3}\cdot\exp(-u)$$

よって，

$$\frac{T}{S}\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{T}{S}\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}-\frac{\partial s}{\partial t}$$

$$=\frac{T}{S}\left(-\frac{AS}{2Tt^2}\exp(-u)+\frac{AS^2r^2}{4T^2t^3}\exp(-u)\right)+\frac{T}{S}\frac{1}{r}\left(-\frac{ASr}{2Tt^2}\exp(-u)\right)-\left(\frac{-A}{t^2}\exp(-u)+\frac{ASr^2}{4Tt^3}\cdot\exp(-u)\right)$$

$$=\left(-\frac{A}{2t^2}\exp(-u)+\frac{ASr^2}{4Tt^3}\exp(-u)\right)+\left(-\frac{A}{2t^2}\exp(-u)\right)-\left(\frac{-A}{t^2}\exp(-u)+\frac{ASr^2}{4Tt^3}\cdot\exp(-u)\right)$$

$$=\left(-\frac{A}{2t^2}+\frac{ASr^2}{4Tt^3}-\frac{A}{2t^2}+\frac{A}{t^2}-\frac{ASr^2}{4Tt^3}\right)\exp(-u)=(0)\exp(-u)=0$$

となり，与式が支配方程式の一般解であることは確認できた。次に，定数 A を決定する。通常ここで境界条件を導入するが以下のように展開する。

時間 t>0 で，帯水層から排出された総量 V_0[L^3]は以下のように帯水層の貯留からの解放量と定義できる。

$$V_0=\int_0^\infty 2\pi rsSdr=\int_0^\infty 2\pi Sr\frac{A}{t}\exp(-u)dr=4\pi TA\int_0^\infty\frac{d}{dr}\left(\frac{Sr^2}{4Tt}\right)\cdot\exp(-u)dr$$

$$=4\pi TA\int_0^\infty\frac{du}{dr}\cdot\exp(-u)dr=4\pi TA\int_0^\infty\exp(-u)du=4\pi TA\left[-\exp(-u)\right]_0^\infty=4\pi TA$$

これより，$A=\dfrac{V_0}{4\pi T}$

$$s=\frac{V_0}{4\pi Tt}\exp(-u)$$

となる。

ここで，排出総量 V_0 が微小時間 dt で排出されたと考えると，その間の流量 Q [L^3/T]には，$V_0=Qdt$ の関係が見出せる。これは，瞬時に水量強度 V_0 を負荷した問題と解せる。Carslaw and Jaeger(1959)はこの解を以下のように展開して，流量 $Q(t)$で継続して揚水した場合の解を定義した。

$$s=\int_0^t \frac{Q(\tau)}{4\pi T(t-\tau)}\exp\left(-\frac{Sr2}{4T(t-\tau)}\right)d\tau$$

ここで，$y=\dfrac{Sr^2}{4T(t-\tau)}$ とおくと，上記積分式は以下のように展開できる。

$$s=\frac{1}{4\pi T}\int_{\frac{Sr^2}{4Tt}}^{\infty}\frac{Q(\tau)}{(t-\tau)}\frac{dy}{d\tau}\exp(-y)d\tau$$

ここで，u の定義式を加味し常識を展開する。
z=t−τ としておく

$$\frac{dy}{d\tau}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{d\tau}=\frac{-Sr^2}{4Tz^2}(-1)=\frac{Sr^2}{4T(t-\tau)^2}$$

よって，

$$d\tau=\frac{4T(t-\tau)^2}{Sr^2}dy=\frac{(t-\tau)}{y}dy$$

$$s=\frac{1}{4\pi T}\int_u^{\infty}\frac{Q(\tau)}{(t-\tau)}\exp(-y)d\tau=\frac{1}{4\pi T}\int_u^{\infty}\frac{Q(\tau)}{y}\exp(-y)dy$$

さらに，流量 Q(t)=Qo：定流量とすると以下となる

$$s=\frac{Q_0}{4\pi T}\int_u^{\infty}\frac{1}{y}\exp(-y)dy$$

これで，Theis の井戸関数が誘導できた。

ところで，Bear(1979)の説明では，一般解が唐突に出てきている。Carslaw and Jaeger(1959)に興味深い誘導があるため，ここで紹介しておく。

まず，三次元直交座標系での支配方程式を挙げている。

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}=\frac{S_S}{K}\frac{\partial s}{\partial t}$$

これに対して，点源に水量 v[L^3]を瞬時に揚水したときを以下としている。

$$s=\frac{v}{8(\pi Kt)^{2/3}}\exp\left\{-\frac{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]}{4Kt/S_S}\right\}$$

ここで，点(x, y, z)は水位低下着目点，点(x', y', z')は点源座標である
さて，これを線源問題に展開するために，線源における微小区間 dz'での瞬間水量は vdz'と考えることができる。この線源は無限領域，即ち $-\infty<z'<+\infty$，までの無限長であり，これを積分すると以下となる。

$$s=\frac{v}{8(\pi Kt)^{2/3}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]}{4Kt/S_S}\right\}dz'$$
$$=\frac{v}{4\pi Kt}\exp\left\{-\frac{\left[(x-x')^2+(y-y')^2\right]}{4Kt/S_S}\right\}$$

と解かれている。ここで，直行座標軸 z'軸上を線源軸とすると，$x'=y'=0$ である。よって以下となる。

$$s=\frac{v}{4\pi Kt}\exp\left\{-\frac{\left[(x)^2+(y)^2\right]}{4Kt/S_S}\right\}=\frac{v}{4\pi Kt}\exp\left\{-\frac{r^2}{4Kt/S_S}\right\}$$

この解は，無限長の線源に対するものであるが，有限長 b，即ち帯水層厚で考えると以下となる。

$$s=\frac{vb}{4\pi Kbt}\exp\left\{-\frac{r^2}{4Kbt/S_S b}\right\}=\frac{vb}{4\pi Tt}\exp\left\{-\frac{r^2}{4Tt/S}\right\}$$

ここで，$vb=V_0$ と置くことで，Bear(1979)の展開にすり合わせることができる。

【参考文献】

1) Batu, V.: Aquifer hydraulics, pp.145-149, John Wiley & Sons, 1998.
2) Bear, J.: Hydraulics of groundwater, pp.319-321, McGraw-Hill, Inc., 1979.
3) Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C.: Conduction of heat in solids, he 2nd ed., Oxford University Press, 510p., 1959.

Theis 井戸関数式の誘導過程　(6)曲線一致法における Theis 井戸関数の活用

曲線一致法について以下に解説する。再掲になるが，基礎情報は以下の二式である。

ここで，井戸関数 $W(\lambda)$は適宜数値化しておかなければならない。これについては，従来から数表が与えられこれを用いるが，近年では多項式計の近似式が提案されており，本解説シリーズでもその精度確認を示しているので参考にされたい（**資料 3-06-1**）。

$$s = \frac{Q}{4\pi T} W(\lambda) \tag{1}$$

$$\lambda = \frac{Sr^2}{4Tt} \tag{2}$$

作業手順から述べると，同じスケールの両常用対数軸紙のそれぞれに，

a) 標準曲線 λ－$W(\lambda)$と測定結果 r^2/t－s(あるいは，$1/t$－s)

あるいは

b) 標準曲線 $1/\lambda$－$W(\lambda)$と測定結果 t/r^2－s(あるいは，t－s)

をプロットする。

これを重ね合わせ（少なくとも上面に置く座標紙は半透明がよい），最も良く一致したときの任意の座標を得るというものである。説明が必要なものは，何故このような図化作業をすることで，透水量係数 T と貯留係数 S が得られるのか，である。

(1)式をみると，$(Q/4\pi T)$は揚水試験では一定値とできるものである。つまり，s と W の比が一定である以下の等式が成り立っている。

$$\frac{s}{W(\lambda)} = \frac{Q}{4\pi T}$$

Q は試験条件であるから既知量であるが，T は未知量である。

したがって，どの測定時間 t に対しても，これに対応する s と W の比が一定なるように T を試行錯誤的に変更していけばいいことになる。