Theis 井戸関数式の誘導過程　(4) Laplace 変換を用いた誘導

Laplace 変換技法は電気工学の回路設計の分野で確立された技法であり，当該の数学書も少なからずあることから，本シリーズでは地下水学での使い方に絞って，この理論解説シリーズの別項で説明する。

G.E. $$\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial s}{\partial t}$$

s:水位低下量 [L]，$\alpha=T/S=K/S_s$

I.C.　$s=0$　for　$t=0$

B.C. ① $s=0$　for　$r\to\infty$

② $2\pi Tr\dfrac{\partial s}{\partial r}=-Q$　for　$r\to 0$（Q は揚水の場合 $Q>0$ と定義）

Laplace 変換(transform)公式（以下，LT とする。)

$$\overline{f(p)}=\int_0^\infty \exp(-pt)f(t)dt$$

ここで，p は Laplace 変数である。

G.E.の LT：

$$\frac{d^2\bar{s}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\bar{s}}{dr}=\frac{1}{\alpha}\left\{p\bar{s}-s(t=0)\right\}$$

I.C.を導入し，整理すると以下の形になる。

$$r^2\frac{d^2\bar{s}}{dr^2}+r\frac{d\bar{s}}{dr}-\frac{p}{\alpha}r^2 p\bar{s}=0$$

上式の一般解は第 1, 2 種修正ベッセル関数 $I_v(z)$，$K_v(z)$の定義式である [1] (Abramowitz and Stegun, 1964)。

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2}+z\frac{dw}{dz}-\left(z^2+v^2\right)w=0$$

ここでは，上式内 v は 0 であり以下となる。

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2}+z\frac{dw}{dz}-z^2w=0$$

この式形の一般解は Carslaw and Jaeger (1959) [2]が以下のように与えている。

$$\frac{d^2\bar{s}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\bar{s}}{dr}-\frac{p\bar{s}}{\alpha}=0$$

$$\bar{s}=AI_0\left(\sqrt{\frac{p}{\alpha}}r\right)+BK_0\left(\sqrt{\frac{p}{\alpha}}r\right)$$

ここで，A, B は境界条件を導入することで得られる定数である。

ここまでは，Theis 式の誘導と全く同じである。ここから，流量境界に違いが見られる。

B.C.の LT：

B.C. ① $\bar{s}=0/p=0$　for　$r\to\infty$

これらを導入する。①において，$r\to$無限大で $I_0(r)\to\infty$となるため，$A\equiv 0$ とせざるを得ない。さらに，②は以下となる。

$$\lim_{r\to 0}2\pi TrB\frac{d}{dr}\left\{K_0\left(\sqrt{\frac{p}{\alpha}}r\right)\right\}=2\pi TB\left[\lim_{r\to 0}\left\{-\sqrt{\frac{p}{\alpha}}rK_1\left(\sqrt{\frac{p}{\alpha}}r\right)\right\}\right]=\frac{-Q}{p}$$

$\lim(x\to 0)xK_1(x)=1$ とされている(Hantush, 1964) [3]。

よって，以下となる。

$$2\pi TB=\frac{Q}{p}\ \text{より},\quad B=\frac{Q}{2\pi Tp}$$

以上の展開から以下の特異解を得る。

$$\bar{s}=\frac{Q}{2\pi Tp}K_0\left(\sqrt{\frac{p}{\alpha}}r\right)$$

これに Laplace 逆変換を施す。

Laplace 逆変換(inversion transform)公式（以下，ILT とする。）

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\exp(pt)\overline{f(p)}dp$$

この逆変換は，Hantush(1964)[3)]が下表の 10 番の式で紹介している。

$f(p)=L\{\bar{f}(t)\}$	$f(t)=L^{-1}\{\bar{f}(p)\}$
1. $1/p$	1
2. $1/p^n$	$t^{n-1}/(n-1)!$
3. $1/p(p+a)$	$(1/a)[1-\exp(-at)]$
4. $1/\sqrt{p}$	$1/\sqrt{\pi t}$
5. $1/p^k$	$t^{k-1}/\Gamma(k)$
6. $(1/\sqrt{p})\exp(-k\sqrt{p})$	$(1/\sqrt{\pi t})\exp(-k^2/4t)$
7. $(1/p)\exp(-k\sqrt{p})$	$\mathrm{erfc}(k/\sqrt{4t})$
8. $(1/p^{1+n/2})\exp(-k\sqrt{p})$	$(4t)^{n/2}i^n\,\mathrm{erfc}(k/\sqrt{4t})$
9. $K_0(k\sqrt{p})$	$(1/2t)\exp(-k^2/4t)$
10. $(1/p)K_0(k\sqrt{p})$	$(1/2)W(k^2/4t)$
11. $K_0(k\sqrt{p+a})$	$(1/2t)\exp(-at-k^2/4t)$
12. $(1/p)K_0(k\sqrt{p+a})$	$(1/2)W(k^2/4t,\ k\sqrt{a})$
13. $(1/p)K_0(k\sqrt{p+a\sqrt{p}})$	$(1/2)H(k^2/4t,\ ka/4)$
14. $K_0(k\sqrt{p})/pK_0(k_1\sqrt{p})$	$A(t/k_1^2, k/k_1)$
15. $K_0(k\sqrt{p})/p(k_1\sqrt{p})K_1(k_1\sqrt{p})$	$(1/2)S(t/k_1^2,\ k/k_1)$
16. $K_0(k\sqrt{p+a})/pK_0(k_1\sqrt{p+a})$	$Z(t/k_1^2,\ k/k_1,\ k_1\sqrt{a})$

[a]The transforms 12 and 13 are obtained from Hantush [2, pp. 3722–3]; 14 and 15 are from Carslaw and Jaeger [10, p. 335 and p. 338]; and 11 is from Hantush [11, p. 1045].

ここで関数 W は井戸関数(well function)であり，指数積分関数のことである。表中 10 式の $k=r/\sqrt{(\alpha)}$ であり，これを用いると以下のように逆変換できる。

$$s=\frac{Q}{2\pi T}\frac{1}{2}W\left(\frac{r^2}{4\alpha t}\right)$$

$\alpha=T/S$ であるので以下のようになり，Theis 式の誘導がなされた。

$$s=\frac{Q}{4\pi T}W\left(\frac{Sr^2}{4Tt}\right)$$

変換表だけで不安なので，一度誘導を試みてみる。以下が Laplace 変換場での解である。

$$\frac{\bar{s}}{Q/2\pi T}=\frac{1}{p}\cdot K_0\left(\sqrt{\frac{p}{\alpha}}r\right)$$

この式形は，以下の積の変換公式が使える。

$$\overline{F_1(p)}\cdot\overline{F_2(p)}\Rightarrow\int_0^t F_1(t-\tau)\cdot F_2(\tau)d\tau$$

これを用いるために，以下のように定義する。

$$\overline{F_1(p)} = \frac{1}{P} \quad \overline{F_2(p)} = K_0\left(\sqrt{\frac{p}{\alpha}}r\right)$$

これら $\overline{F_1(p)}$，$\overline{F_2(p)}$ に対して，以下の F_1，F_2 が変換表に見られる。

$$F_1(p) \to 1 \quad F_2(p) \to \frac{1}{2t}\exp\left(\frac{-r^2}{4\alpha t}\right)$$

これらを積の変換公式に代入すると以下となる。

$$\frac{s}{Q/2\pi T} = \int_0^t 1 \cdot \frac{1}{2\tau}\exp\left(\frac{-r^2}{4\alpha\tau}\right)d\tau$$

ここで，exp 関数内に着目して以下の λ を定義する。

$$\lambda = \frac{Sr^2}{4Tt} = \frac{r^2}{4\alpha t}$$

よって，

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{r^2}{4\alpha\tau}\right) = \frac{-r^2}{4\alpha\tau}\frac{1}{\tau} = -\lambda \cdot \frac{1}{\tau}$$

また，

$$\tau = \frac{r^2}{4\alpha\lambda}$$

これより以下のように変形できる。

$$\frac{s}{Q/2\pi T} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\tau}\left(-\frac{\tau}{\lambda}\right)\exp(-\lambda)d\lambda = \frac{1}{2}\int(-1)\frac{\exp(-\lambda)}{\lambda}d\lambda$$

ここで，積分範囲であるが以下のように考える。

$\tau=0 \to \lambda=\infty$である。$\tau=t \to \lambda=\lambda$ となる。よって以下となり，更に，係数項の(－1)を積分範囲に取り込んで以下となる。

$$\frac{s}{Q/2\pi T} = \frac{1}{2}\int_\infty^\lambda \frac{(-1)\exp(-\lambda)}{\lambda}d\lambda$$

これを整理すると以下となる。

$$\frac{s}{Q/4\pi T} = \int_\lambda^\infty \frac{\exp(-\lambda)}{\lambda}d\lambda$$

（留意点）

上表のように，逆変換公式は提示されているが，この誘導過程が明確であるものは比較的簡単な式形に限定される。ここで示したようなベッセル関数を含む式形の逆変換の誘導は高度な数学技術を要するもので，容易ではない。ここでは，過去の研究成果の引用として留めるが，この確認として，近似式（漸化式）で表したものを数値化し，これを数値的逆 Laplace 変換の結果比較が考えられる。

【参考文献】

1） Abramowitz, M. and Stegun, I.A.: Handbook of mathematical functions, p.374, 1964.
2） Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C.: Conduction of heat in solids, Oxford University Press, 2nd ed., p.332, 1959.
3） Hantush, M.S.: Advances in Hydroscience, Hydraulics of wells, p.332, 1964.