指数積分関数の漸化（級数展開）式と直線式の誘導

指数積分関数（以下簡単のため，Theis 式と呼ぶ）は以下の定義である。

$$\frac{s}{Q/4\pi T}=\int_{\lambda}^{\infty}\frac{\exp(-y)}{y}dy \tag{1}$$

ここで， $\lambda=\dfrac{Sr^2}{4Tt}$， T：透水量係数 [L^2/T]， S：貯留係数 [－]， s：水位低下量 [L]， Q：揚水流量 [L^3/T]。

この式の級数展開は次式で表すとされている。

$$\int_{\lambda}^{\infty}\frac{\exp(-y)}{y}dy=E_1(\lambda)=-\log_e(\lambda)-\gamma-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\lambda^k}{k\cdot k!} \tag{2}$$

ここで，γ：Euler（オイラー)定数＝0. 577215664901532860（ネット上では以下の値が紹介されている 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576723488486772677766467 09369 47063 29174 67495….)。

Cooper-Jacob 法で用いる直線近似式は，λ が十分小さい場合には，(2)式の∑部分が 0 とみなすことが出来るとした，次式である。

$$\int_{\lambda}^{\infty}\frac{\exp(-y)}{y}dy=E_1(\lambda)\cong-\log_e(\lambda)-\gamma \tag{3}$$

（漸化式の誘導）

ここで，(2)式の誘導を試みる。まず，積分区間を分割すると以下のように書き直すことができる。

$$E_1(\lambda)=\int_{\lambda}^{\infty}\frac{\exp(-y)}{y}dy=\int_{0}^{\infty}\frac{\exp(-y)}{y}dy-\int_{0}^{\lambda}\frac{\exp(-y)}{y}dy \tag{4}$$

(4)式右辺第一項を以下のように整理する。

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\exp(-y)}{y}dy=\int_{0}^{\infty}[\log_e(y)]'\exp(-y)dy=\left[[\log_e(y)]\exp(-y)\right]_0^{\infty}-\int_{0}^{\infty}[\log_e(y)][-\exp(-y)]dy$$

よって，以下となる。

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\exp(-y)}{y}dy=\left[[\log_e(y)]\exp(-y)\right]_0^{\infty}-\int_{0}^{\infty}[\log_e(y)][\exp(-y)]dy$$

上式右辺第二項はオイラー定数の定義式に他ならない。

$$\gamma=\int_{0}^{\infty}[\log_e(y)][\exp(-y)]dy$$

同第一項は以下のように展開できる。

$$\left[[\log_e(y)]\exp(-y)\right]_0^{\infty}=\lim_{y\to\infty}[\log_e(y)]\exp(-y)-\lim_{y\to 0}[\log_e(y)]\exp(-y)$$

ここで，l'Hospital 則(原関数の除算の無限大での収束は，微分関数の除算の収束に等しい)を使うと以下のようになる。

$$\lim_{y\to\infty}[\log_e(y)]\exp(-y)=\lim_{y\to\infty}\frac{1/y}{\exp(y)}=0$$

ここまでを整理すると以下となる

$$E_1(\lambda)=\int_{\lambda}^{\infty}\frac{\exp(-y)}{y}dy=-\gamma-\lim_{y\to 0}[\log_e(y)]\exp(-y)-\int_{0}^{\lambda}\frac{\exp(-y)}{y}dy$$

ここで，上式右辺第二項は，$y\to 0$ で $\exp(-y)\to 1$ となることから，以下となる。

$$E_1(\lambda)=\int_\lambda^\infty \frac{\exp(-y)}{y}dy=-\gamma-\lim_{y\to 0}[\log_e(y)]-\int_0^\lambda \frac{\exp(-y)}{y}dy$$

更に，上式第三項を考えるに先立って，exp(-y)の以下の漸化式を導入する。

$$\exp(-z)=\cosh(z)-\sinh(z)$$

であることから，以下の漸化式を導入することができる。

$$\sinh(z)=\frac{e^z-e^{-z}}{2}=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}+\cdots\cdots$$

$$\cosh(z)=\frac{e^z+e^{-z}}{2}=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\cdots\cdots$$

よって，

$$\exp(-z)=\cosh(z)-\sinh(z)=1-z+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots\cdots$$

これを用いると，以下の積分が実施できる。

$$\begin{aligned}\int_0^\lambda \frac{\exp(-y)}{y}dy &= \int_0^\lambda \frac{1-y+\frac{y^2}{2!}-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}-\frac{y^5}{5!}+\frac{y^6}{6!}-\frac{y^7}{7!}+\cdots\cdots}{y}dy \\ &= \int_0^\lambda \frac{1}{y}-1+\frac{y}{2!}-\frac{y^2}{3!}+\frac{y^3}{4!}-\frac{y^4}{5!}+\frac{y^5}{6!}-\frac{y^6}{7!}+\cdots\cdots dy \\ &= \left[\log_e(y)-y+\frac{y^2}{2\cdot 2!}-\frac{y^3}{3\cdot 3!}+\frac{y^4}{4\cdot 4!}-\frac{y^5}{5\cdot 5!}+\frac{y^6}{6\cdot 6!}-\frac{y^7}{7\cdot 7!}+\cdots\cdot\right]_0^\lambda \\ &= \log_e(\lambda)-\lambda+\frac{\lambda^2}{2\cdot 2!}-\frac{\lambda^3}{3\cdot 3!}+\frac{\lambda^4}{4\cdot 4!}-\frac{\lambda^5}{5\cdot 5!}+\frac{\lambda^6}{6\cdot 6!}-\frac{\lambda^7}{7\cdot 7!}+\cdots\cdot-\lim_{y\to 0}\log_e(y) \\ &= -\lim_{y\to 0}\log_e(y)+\log_e(\lambda)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\lambda^k}{k\cdot k!}\end{aligned}$$

よって，以下となる。

$$\begin{aligned}E_1(\lambda) &= \int_\lambda^\infty \frac{\exp(-y)}{y}dy=-\gamma-\lim_{y\to 0}[\log_e(y)]-\int_0^\lambda \frac{\exp(-y)}{y}dy \\ &= -\gamma-\lim_{y\to 0}[\log_e(y)]+\lim_{y\to 0}\log_e(y)-\log_e(\lambda)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\lambda^k}{k\cdot k!} \\ &= -\gamma-\log_e(\lambda)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\lambda^k}{k\cdot k!}\end{aligned}$$

これで，(2)式が誘導できたことになる。

（近似式の誘導状況）

近似式がいくつか紹介されている。一般に，Abramowitz and Stegun の公式集 [1]から，二つの式が採用されているが，同書には以下の四つの近似式があり，それぞれ異なる文献からの引用である。

$$E_1(x)+\log_e(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\varepsilon(x) \tag{5}$$

ただし，$0\le \boldsymbol{x}\le 1$　$|\varepsilon(x)|<2\times 10^{-7}$

a_0=－0.57721 566　a_1=　0.99999 193　a_2=－0.24991 055

a_3=　0.05519 968　a_4=－0.00976 004　a_5=　0.00107 857

Allen(1954)[2]：

$$xe^xE_1(x)=\frac{x^2+a_1x+a_2}{x^2+b_1x+b_2}+\varepsilon(x) \tag{6}$$

ただし，$1 \le x \le \infty$　$|\varepsilon(x)| < 5\times10^{-5}$

a_1=　2.334733　a_2=　0.250621

b_1=　3.330657　b_2=　1.681534

Hastings, Jr(1955)[3]：

$$xe^{x}E_1(x)=\frac{x^2+a_1x+a_2}{x^2+b_1x+b_2}+\varepsilon(x) \tag{7}$$

ただし，$10 \le x \le \infty$　$|\varepsilon(x)| < 10^{-7}$

a_1=　4.03640　a_2=　1.15198

b_1=　5.03637　b_2=　4.19160

（注：(7)式は原著での確認はできていない。）

また，同著者による後年(1955)の書籍にはこの式は掲載されていない。

$$xe^{x}E_1(x)=\frac{x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4}{x^4+b_1x^3+b_2x^2+b_3x+b_4}+\varepsilon(x) \tag{8}$$

ただし，$1 \le x \le \infty$　$|\varepsilon(x)| < 2\times10^{-8}$

a_1=　8.57332 87401　a_2= 18.05901 69730　a_3=　8.63476 08925　a_4=　0.26777 37343

b_1=　9.57332 23454　b_2= 25.63295 61486　b_3= 21. 09965 30827　b_4=　3.95849 69228

ここで，(5)式は(2)式と同形の多項式であるので，誘導するまでもないと思われたが，(2)式の総和を書き下して得られるλ乗数の係数値と(5)式のそれは一致しない。これについては後に考察する。

(5)～(8)式については，それぞれの出典にみられる原著を確認する作業が必要であろう。

また，一般に用いられているのは，(5)および(8)式である。これらは誤差幅が他よりも比較的小さいことから採用されているものであろう。しかしながら，これらはあくまでも x^5 や x^4 までの計算で打ち切る場合の計算式であり，近年のように PC の活用が一般的であれば(2)式の収束計算を必要な誤差域に収まるまで実施することも不可能ではない。このことから，これらの近似式の誘導方法を確認することで，更に高次多項式を近似式に採用することも有益となるであろう。

（留意点）

これまでの説明内容をここで議論をしてみよう。

1）漸化式

(2)式の漸化式は理論的誘導できることは先に示した。これを計算すればよい。しかし，この計算で気をつけなければならないのは，Σ 内の値および総和は増減する特性を示し，その差は二桁オーダーの差を見せることがあり，λ>1 ではこの傾向が顕著になる。このため，数値的な扱いになった時点で“桁落ち”あるいは“丸め誤差の発生”といった現象が生ずることで，正確な値を算定することが困難である。いくらか試行してみたところ，λ＜10 程度の範囲までが計算の限界と考えられる。

実際に，刊行されている書籍にみられる井戸関数表をみても，λ<10 程度までの範囲となっている。試行計算でも，計算手順によっては λ=10 の結果を正しく得ることができない場合もあり，注意が必要である。

2）近似式（その 1）

(3)式が Cooper－Jacob（直線勾配）法で用いられるものである。また，(Theis の）回復の式および Agawel の回復法の式（我国では西垣･高坂の式として知られる）なども，(3)式から誘導が始まる。これらのことから，上記の近似化を理解する意味がある。

(3)式の直線を示すとはどういう意味なのか？　式だけ見ると以下の説明である。

$$\int_{\lambda}^{\infty}\frac{\exp(-y)}{y}dy = E_1(\lambda) \cong -\log_e(\lambda) - \gamma$$

$$= -\log_e(\lambda) - \log_e(e^{\gamma}) = -\log_e(\lambda e^{\gamma})$$

$$= \log_e\left(\frac{1}{\lambda e^{\gamma}}\right) = \log_e\left(\frac{4Tt}{e^{\gamma}Sr^2}\right) = \log_e\left(\frac{t}{r^2}\right) + \log_e\left(\frac{4T}{e^{\gamma}S}\right)$$

ここで，$\lambda = Sr^2/4Tt$，e=2.71828 18284....，γ=0.57721 56649....

よって，e^{γ}=1.781072416..，4/ e^{γ}=2.245837937....

$$\int_{\lambda}^{\infty}\frac{\exp(-y)}{y}dy = E_1(\lambda) \cong \log_e\left(\frac{t}{r^2}\right) + \log_e\left(\frac{2.2458T}{S}\right)$$

$$= \log_e\left(\frac{t}{r^2}\right) - \log_e\left(\frac{S}{2.2458T}\right)$$

よって，(1)式に戻ると以下となる。

$$\frac{s}{Q/4\pi T} = \log_e\left(\frac{t}{r^2}\right) - \log_e\left(\frac{S}{2.2458T}\right)$$

$$s = \frac{Q}{4\pi T}\left\{\log_e\left(\frac{t}{r^2}\right) - \log_e\left(\frac{S}{2.2458T}\right)\right\}$$

$$= \frac{Q}{4\pi T}\left\{2.3\log_{10}\left(\frac{t}{r^2}\right) - 2.3\log_{10}\left(\frac{S}{2.2458T}\right)\right\}$$

$$= \frac{2.3Q}{4\pi T}\left\{\log_{10}\left(\frac{t}{r^2}\right) - \log_{10}\left(\frac{S}{2.2458T}\right)\right\}$$

ここで，$\log_{10}(x)$=(0.43429 44819...)$\log_e(x)$，∴ $\log_e(x)$=(2.302585098....)$\log_{10}(x)$である。

また，解説が必要なのは，(3)式としてもよいλの範囲の適正化であろう。

・Theis(1935)では，非常に小さい (very small)

・赤井(1966)[4)]では，λ<1

以下，試算（ここで，$u=\lambda$）で λ<0.01 オーダーであれば，直線式適用化と言えそうだが，この判断はどこに委ねるのか？　これは技術者の判断による。

u	① $-0.577216...-\ln(u)$ [①/③]	② $-0.577216...-\ln(u)+u$ [②/③]	③ $-0.577216...-\ln(u)+u-u^2/2\cdot 2!$
1.0	-0.577216...[-3.340]	0.422784...[2.4468]	0.172784...
0.1	1.725369...[0.9465]	1.825369...[1.0013]	1.822869...
0.03	2.929341...[0.9899]	2.959341...[1.00007]	2.959116...
0.02	3.334807...[0.9940]	3.354807...[1.00002]	3.354707...
0.01	4.027954...[0.9975]	4.037954...[1.000006]	4.037929...
0.001	6.330539...[0.9998]	6.331590...[1.0000001]	6.331589...

このように，対数軸に t/r^2 をとることで，上式は直線を表すことになり，横軸常用対数－縦軸算術水位低下量軸でみると，その傾きは$(2.3Q/4\pi T)$であり，横軸切片$(t/r^2)_0=(S/2.248T)$となる。また，わが国ではあまり紹介されていないが，横軸を対数軸上の距離 r でみる考え方がある。通常は，Thiem 法といわれる定常状態の観測値に対する整理方法であるが，上式が成立しておれば以下のように示すことができる。

$$s=\frac{2.3Q}{4\pi T}\left\{\log_{10}\left(\frac{t}{r^2}\right)-\log_{10}\left(\frac{S}{2.2458T}\right)\right\}$$
$$=\frac{2.3Q}{4\pi T}\left\{-\log_{10}\left(r^2\right)-\log_{10}\left(\frac{S}{2.2458Tt}\right)\right\}$$

この式が示すところは，揚水経過時間 t に対して観測距離の異なる水位低下量は片対数軸上で直線を示すということである。

3) 近似式（その 2）

先述の(5)から(8)の近似式群と(3)式の近似式は幾分その出自が違うことに注意したい。(3)式は前項の説明あるように，打ち切りによる近似であることは明らかである。これに対して，(5)～(8)式群は，打ち切りではなく何らかの近似化算定されたものであると推定している。これについては，以下の説明が分かりやすいだろう。

(2)式の総和部を書き下してみると以下のようになる。

$$E_1(x)+\log_e(x)=-\gamma-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{k\cdot k!}$$
$$=(-\gamma)+\frac{-(-1)^1}{1\cdot 1!}x^1+\frac{-(-1)^2}{2\cdot 2!}x^2+\frac{-(-1)^3}{3\cdot 3!}x^3+\frac{-(-1)^4}{4\cdot 4!}x^4+\frac{-(-1)^5}{5\cdot 5!}x^5+\cdots\cdots\cdots \tag{2'}$$

$$E_1(x)+\log_e(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\varepsilon(x) \tag{5}$$

ただし，(5)式適用範囲は $0\le x\le 1$　$|\varepsilon(x)|<2\times10^{-7}$。
(2)式を展開(書き下)した(2’)式と(5)式のそれぞれの係数値を文献値と比較すると下表のようになる。

係数	(2’)式	(5)式(文献値)
a_0	−0.57721 566	−0.57721 566
a_1	1.0	0.99999 193
a_2	−0.25	−0.24991 055
a_3	0.05555　555	0.05519 968
a_4	−0.01041　667	−0.00976 004
a_5	0.00166　667	0.00107 857

まったく違うわけではないが，異なる値である。まさかこれが数十年以上の技術伝承の過程で写し間違いがあったとも思えない。そこで，式群は採取したデータセットに対して得られた近似曲線として，改めて計算してみることにした。

下表に示すデータセットを用意し，Microsoft Excel の組み込み機能を使って係数項を算定してみる。ここで，関数 E_1 も $\log_e$ も x=0 の定義はできないが，(2’)式右辺をみるとこれが適用できる。すなわち，x=0 における｛$E_1(x)$-$\log_e(x)$｝の定義は妥当であり，これらは a_0 に収束する。このため a_0 は明らかに γ とすべきと考える。そこで，数表からいくつかのλに対する関数値｛$E_1(\lambda)+\log_e(\lambda)$｝を抽出した。これを下表に示す。

λ	$E_1(\lambda)+\log_e(\lambda)$
0	-0.57721566
0.1	-0.479661133
0.15	-0.432658438
0.2	-0.386787372
0.25	-0.342011727
0.5	-0.133373581

0.6	-0.056446121
0.7	0.017093896
0.8	0.087453027
0.9	0.154823424
1	0.219383934

先述のように，(2)式の総和書き下しと(5)式の係数項を比較すると以下のようになる。

係数	(2’)式	(5)式(文献値)	回帰曲線(最小二乗近似)
a_0	−0.57721 566	−0.57721 566	−0.57721566 (設定値)
a_1	1.0	0.99999 193	0.99999　414
a_2	−0.25	−0.24991 055	−0.249930　335
a_3	0.05555　555	0.05519 968	0.055257　702
a_4	−0.01041　667	−0.00976 004	−0.009828　146
a_5	0.00166　667	0.00107 857	0.000110　626

ここでは，先述の係数値も再掲しておく。回帰曲線による係数値は(2’)式の係数より(5)式の方により近いことが分かる。勿論，回帰によって係数を求める場合には，$\lambda-(E_1(\lambda)+\ln(\lambda))$のデータの質・量に依存する。(5)式の出典元である Allen(1954)には結果しか掲載されておらず，どのような誘導あるいはどのようなデータに基づいたものか不明である。今後，これら係数の算定方法については検討すべきと考える。

（近似式の使い方について）

(5)および(8)式は，最近でスプレッドシートアプリケーションの普及により，非常に使い勝手のよい近似式である。ここでは特筆すべき特徴を整理して，その使い方に関して提言を述べておきたい。

a）これらの近似式は, Cooper-Jacob 式といわれる(3)式と同じように扱われることがあるが, 実は全く違う。(3)式は，(2)式の総和項を無視できるほど小さいとした近似式であり，(5)～(8)式は，真値を持つデータセットに対して回帰分析などの近似化を施した結果として算定されたものであろう（現時点では，未確認であるが・・・)。

b）a)に示すように(5)式が近似化によって得られることから，いくつかのデータを数表から抽出し，最小二乗近似などを実施してみれば，(5)式が得られるはずである。当然，多項式の各係数項の値はデータセットによって若干異なるのだが，示されている適用範囲内であれば問題のあるような誤差を持つものとはならないだろう。

c）λが十分に小さい値であれば，(3)式によって計算でき，(5)式や数表を用いることもない。

今後，特に以下の項目が重要と考える。

d）(4)～(8)式はいずれも $1\leq\lambda<\infty$に適用範囲を持つとされている。精度の観点で，(8)式の利用を推奨することが多い。a)に示したように回帰分析によるのであれば，この適用範囲に該当するデータセットに対する分析を実施する必要がある。しかし，数表を見ると $\lambda<10$ が一般的であり，$\lambda=9.9$ のとき，$E_1(\lambda)=4.637\text{E-}6$ が数表の限界である。回帰分析に用いたデータセットも見つけられないのが現状である。

e）この限界のλ値やE_1値では実用上で問題があるか否かについては使い方に依存すると考える。一般の地盤地層に対する評価であれば，まず問題ないだろうが，揚水開始直後の非常に早い(小さい)時間での評価を必要とする場合には，要注意である。昨今のように，計算機内で自動的に曲線一致法を扱う場合には，余裕を持って探索範囲を広くするため，図による手動解析（手動 fitting）と異なり，“知らないうちに”本当の適用範囲を超えた使い方を(8)式に強いていることがあるのである。

f）以上の観点から，実際に，$10\leq\lambda$ の範囲の真値を得る試みを行っているが，(2)式による計算では総和計算過程での桁落ちの問題がある。この改良としては，有効桁を極端に大きくして評価するシステムもあり，数表作成という頻繁に実施しない場合には適用の可能性が高い。現段階までの試算で，λ値が 15 程

度までは計算が安定しているようであるが，値の正確さの確認が取れていないため，今後の研究に委ねたい。

g）よって，現時点では，(8)および(8-1)式の適用範囲は，既存の数表で真値が確認できる $1 \leq \lambda < 10$ とすることを推奨する。

【参考文献】

1） Abramowitz, H. and Stegun, I.A., p.231, sec.5.1. pp.53-56, 1964,

2） Allen, E.E.：Note 169, MTAC 8, 240., 1954.

3） Hastings, Jr. C. : Approximations for digital computers, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., Note 143, MTAC 7, 68, 1955.

4） 赤井浩一：土質力学，朝倉土木工学講座 5，朝倉書店，pp.46-56，1966.