近似直線勾配式の誘導

1）井戸（指数積分）関数から近似直線勾配式の誘導

Theis 式あるいは井戸関数と呼ばれる指数積分関数は以下の定義である。

$$\frac{s}{Q/4\pi T}=\int_{\lambda}^{\infty}\frac{\exp(-y)}{y}dy \tag{1}$$

ここで，$\lambda=\frac{Sr^2}{4Tt}$，T：透水量係数 [L^2/T]，S：貯留係数 [－]，s：水位低下量 [L]，Q：揚水流量 [L^3/T]。この式の級数展開は次式で表すとことができる。同級数展開式の誘導は別資料（**資料 3-05**）にて解説する。

$$\int_{\lambda}^{\infty}\frac{\exp(-y)}{y}dy=W(\lambda)=-\log_e(\lambda)-\gamma-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\lambda^k}{k\cdot k!} \tag{2}$$

ここで，γ：Euler（オイラー）定数＝0.577215665. . . .，また，(1)および(2)式の関数は地下水学では井戸関数と呼ぶ。（ネット上では，γ 値は

0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672348848677267776646709369470632917467495….を紹介しているが，実用上 15 桁程度用いれば十分であろう）

さて，ここで(2)式において λ が小さくなると，(2)式右辺総和内が無視できるとして，次式が提案されている。

$$W(\lambda)=-\log_e(\lambda)-\gamma \tag{3}$$

この式は片対数軸（1/λ 軸を対数化）上では直線になり，後述するようにこの特性を用いて Cooper and Jacob (1946)[1)]は直線勾配法による揚水試験結果の整理方法を提案しており，この方法はわが国でもきわめて広く普及している。

2）直線勾配式の適用性確認（その 1）：高度計算結果との比較

ここで，この直線式の適用範囲について考えてみる。λ 値に対していくつかの提案がある。例えば，以下のように整理できる。

赤井(1966)[2)]では，λ<1。試算（ここで，u=λ），λ<0.01 オーダーであれば，直線式適用化と言えそうだが，この判断はどこに委ねるのか？これは技術者の判断による。では，その拠り所となる井戸（指数積分）関数を精度よく求めた値を導入する必要がある。教科書などで紹介されている数表をみると，有効数字が 4 から 6 桁程度である。

現在，いくつかの高精度（有効桁を多く）維持計算方法が提案されているが，いずれも何らかの計算コードを組まねばならない。インターネットを介して利用できるものに，maxima システムがある（http://maxima.sourceforge.net/）。また，比較的手軽に計算できるものとして，ネット上に CASIO 計算の高精度計算サイトがある（http://keisan.casio.jp/）。

ここで，直接指数積分関数が扱えるものもあるが，以下の定義があることを確認しておきたい。

$$\Gamma(\nu,x)=\int_{x}^{\infty}\exp(-u)u^{\nu-1}du \tag{4}$$

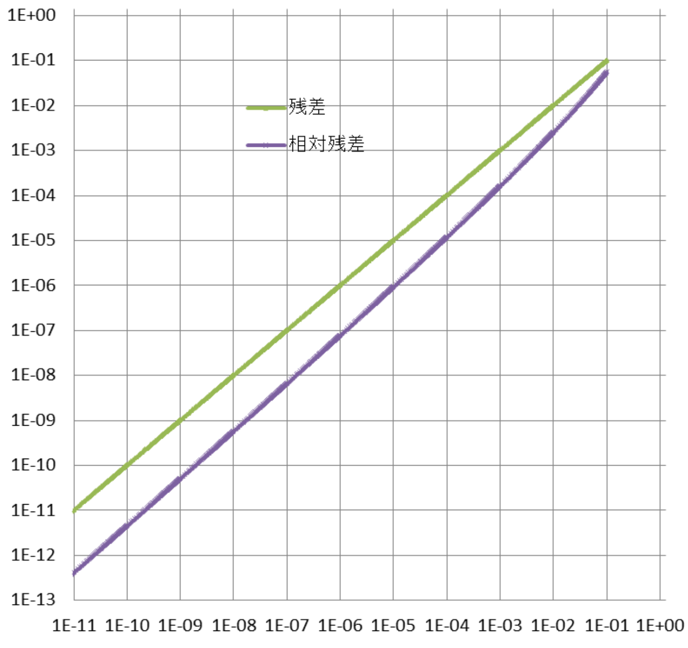
この関数は，第二種不完全ガンマ関数と称され，ν=0 とすれば以下となる。

$$\Gamma(0,x)=\int_{x}^{\infty}\exp(-u)u^{-1}du \tag{5}$$

(5)式は指数積分関数に他ならず，これを数値化することで関数値を得ることが可能である。ガンマ関数として指数積分関数値が得られることも覚えておきたい。下表にいくつかの λ に対して関数値を求めた結果と(3)式の計算結果の整合を示す。

λ	①$\Gamma(0,\lambda)=E_1(\lambda)=W(\lambda)$	②(3)式	誤差|①-②|	相対誤差 |①-②|/①
1.0E-12	2.7053805451E+01	2.7053805451E+01	1.0E-12	3.6507041662E-14
1.0E-11	2.4751220358E+01	2.4751220358E+01	1.0E-11	4.0118566231E-13
1.0E-10	2.2448635265E+01	2.2448635265E+01	1.0E-10	4.4535854610E-12
1.0E-09	2.0146050173E+01	2.0146050172E+01	1.0E-09	4.9633646022E-11
1.0E-08	1.7843465089E+01	1.7843465079E+01	1.0E-08	5.6042731893E-10
1.0E-07	1.5540880086E+01	1.5540879986E+01	1.0E-07	6.4346362639E-09
1.0E-06	1.3238295893E+01	1.3238294893E+01	1.0E-06	7.5538397560E-08
1.0E-05	1.0935719800E+01	1.0935709800E+01	1.0E-05	9.1443225376E-07
1.0E-04	8.6332247046E+00	8.6331247071E+00	1.0E-04	1.1582867755E-05
1.0E-03	6.3315393641E+00	6.3305396141E+00	1.0E-03	1.5789999841E-04
1.0E-02	4.0379295765E+00	4.0279545211E+00	1.0E-02	2.4703391336E-03
1.0E-01	1.8229239584E+00	1.7253694281E+00	1.0E-01	5.3515414001E-02

$\lambda<0.01$ で相対誤差は 1/1000 オーダーとなっていることがわかる。
ここで，直接誤差をみてみると，λ と同じ値になることがわかる。



(2)式を見れば明らかであるが。

$$\int_{\lambda}^{\infty}\frac{\exp(-y)}{y}dy=W(\lambda)=-\log_e(\lambda)-\gamma-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\lambda^k}{k\cdot k!} \qquad (2)再掲$$

残差の絶対値は$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\lambda^k}{k\cdot k!}\right|$である。$\lambda$ は 1 より(十分)小さいことから，λ のベキ数 k が増えても，その総和は(λ^1)で代表されてしまうのである。よって，直接残差 $\varepsilon(\lambda)$は $\varepsilon(\lambda)=\lambda$ としていいだろう。

3）直線勾配式の適用性確認（その 1）：精度評価式の理論誘導

直線勾配法の適用を考えると，主たる確認事項は，(3)式の関数値の妥当性（精度）だけでなく，直線勾配が妥当であるかの確認もなされるべきである。

(3)式は標準値に対するため，以下のように片（自然）対数軸上での勾配値は 1 となる。

$$W(\lambda)=-\log_e(\lambda)-\gamma=\log_e\left(\frac{4Tt}{Sr^2}\right)-\gamma=\log_e(t)+\log_e\left(\frac{Sr^2}{4T}\right)-\gamma$$

$$\frac{dW(\lambda)}{d\log_e(t)}=\frac{d}{d\log_e(t)}\left\{\log_e(t)+\log_e\left(\frac{Sr^2}{4T}\right)-\gamma\right\}=\frac{d}{d\log_e(t)}(\log_e(t))=1$$

この曲線勾配を扱う考え方は derivative と呼ばれるもので，近年現場透水試験結果の整理技術に導入されつつあるものである。

このように, 実時間 t に対しては, 単位の勾配であれば直線であることが確認できることになる。しかし, 実務では λ ではなく時間 t で考えることから，t に対して(1)式が同じく片（自然）対数軸上にプロットした場合に，どのような曲線勾配を示すかを考えてみる。説明のために(3)式の井戸関数 W を用いると以下のように書き換えることができる。

$$\frac{dW(\lambda)}{d\log_e(t)}=t\frac{dW(\lambda)}{dt}=t\frac{d\lambda}{dt}\frac{dW(\lambda)}{d\lambda}$$

このように, 時間 t の対数で井戸関数を微分すると，(3)式ではその勾配が 1 となることがわかる。では, 井戸関数 W に同様の微分を施すとどのようになるのか誘導しておく。

(1)式から $dW/d\lambda$ の誘導は幾分面倒であるが，(2)式から以下のように誘導できる。

$$E_1(u)=-\gamma-\ell nu+u-\frac{u^2}{2*2!}+\frac{u^3}{3*3!}-\frac{u^4}{4*4!}+\frac{u^5}{5*5!}+\cdots$$

これを項別微分すると

$$\frac{\partial}{\partial u}E_1(u)=-\frac{1}{u}+1-\frac{u}{2!}+\frac{u^2}{3!}-\frac{u^3}{4!}+\frac{u^4}{5!}+\cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial u}E_1(u)=-\frac{1}{u}\left[1-u+\frac{u^2}{2!}-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^4}{4!}-\frac{u^5}{5!}+\cdots\right]$$

となる。[　]内は次式の級数展開である。

$$e^{-y}=\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n y^n}{n!}=1-y+\frac{y^2}{2!}-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}-\frac{y^5}{5!}+\cdots$$

よって，次式が成り立つ。

$$\frac{\partial}{\partial u}E_1(u)=-\frac{1}{u}\left[1-u+\frac{u^2}{2!}-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^4}{4!}-\frac{u^5}{5!}+\cdots\right]=-\frac{e^{-u}}{u}$$

$$\therefore\ \frac{\partial}{\partial u}E_1(u)=-\frac{e^{-u}}{u}$$

この関係を(4)式に代入し整理する。

$$\frac{dW(\lambda)}{d\log_e(t)}=t\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{Sr^2}{4Tt}\right)\frac{-\exp(-\lambda)}{\lambda}=t\cdot\frac{-Sr^2}{4Tt^2}\frac{-\exp(-\lambda)}{\lambda}=\frac{Sr^2}{4Tt}\frac{\exp(-\lambda)}{\lambda}=\lambda\cdot\frac{\exp(-\lambda)}{\lambda}$$
$$=\exp(-\lambda)$$

ここで，λ が十分に小さいと，$\exp(\lambda)=1$ となる。本検討の目的は，片対数軸上での曲線勾配が 1 とみなせる範囲の確認であることから，この関係を利用すると，以下の差分 $r(\lambda)$に着目し，差分 r が十分に小さい（0）とみなせる λ の適用範囲を探索する問題になる。

$$r(\lambda)=1-\exp(-\lambda)$$

比較する勾配値が 1 であるため，差分 r はそのまま相対誤差とみなすことが出来る。
ここで，以下の近似式が提案されている。
$0\leq\lambda\leq\log_e(2)=0.69314718\ldots$..では，

$$\exp(-\lambda)=1+a_1\lambda+a_2\lambda^2+a_3\lambda^3+a_4\lambda^4+a_5\lambda^5+a_6\lambda^6+a_7\lambda^7+\varepsilon(\lambda) \quad , \quad |\varepsilon(\lambda)|\leq 10^{-10}$$

ここで，a_1=－0.9999999995　a_5=－0.0083013598
a_2=　0.4999999206　a_6=　0.0013289920
a_3=－0.1666653019　a_7=－0.0001413161
a_4=　0.0416573475

よって，差分は以下となる。

$$r(\lambda)=1-\exp(-\lambda)=-a_1\lambda-a_2\lambda^2-a_3\lambda^3-a_4\lambda^4-a_5\lambda^5-a_6\lambda^6-a_7\lambda^7-\varepsilon(\lambda) \qquad (7)$$

検討に値する λ の範囲は，直接の比較で $\lambda<0.01$ であるため，高次べき乗項を無視することも可能である。

$$r(\lambda)=1-\exp(-\lambda)\cong -a_1\lambda$$

今，($-a_1$)は十分に 1 とみなせる値であるため，さらにこれを代入すると以下となる。

$$r(\lambda)=1-\exp(-\lambda)\cong \lambda$$

上式の示すところは以下である。

直線勾配式の適用範囲を，直線勾配の理論的な誤差精度から考えると，λ 値がそのまま勾配値の相対誤差になっている。つまり，$\lambda<0.01$ であれば，理論的には算定勾配の誤差は 1%以下であるといえる。直線の成立性の適用範囲として λ を用いたが，勾配値との関係が不明瞭であったが，以上のように明確に適用性を説明することが可能となった。後に示すように，この直線勾配から透水量係数，s=0 軸切片時間から S を評価する Cooper-Jacob 法の特徴から，直線式による水位低下量 s と勾配値の両者の十分な一致を評価しておけばよい。実用上は適用範囲 $\lambda<0.01$ というは十分であると判断できる。

【参考文献】

1） Cooper, H.H. and Jacob, C.E.： A generalized graphical method for evaluating formation constants and summarizing well field history, Am. Geophys. Union Trans., vol. 27, pp. 526-534, 1946.
2） 赤井浩一：土質力学，朝倉土木工学講座 5，朝倉書店，pp.46-56，1966.