井戸関数の近似直線勾配式の誘導とその活用について

Theis の井戸関数は指数積分関数とも呼ばれ，この近似式は，Theis(1935)で既に紹介されており，Theis をこの近似式を用いて回復試験結果の整理式を誘導している。Cooper and Jacob(1946)では片対数軸上のプロットに見られる直線分布から直線部の勾配と s=0 軸切片時間から透水量係数 T と貯留係数 S を算定する図解的な技法を提案している。また，van Poolen が示したとされる影響圏半径 R の非定常公式は非定常試験データを時間ごとに定常試験結果として Thiem 法で整理した際の s=0 軸切片時間から誘導できるものである。また，この近似式を用いて，揚水ポンプ停止後の回復過程を試験とした際の近似式や非定常試験結果に Thiem 法を適用する方法も提案されている。

以下にこれら説明する。

(1) 近似直線勾配式

Theis 式あるいは井戸関数と呼ばれる指数積分関数は以下の定義である。

$$\frac{s}{Q/4\pi T}=\int_{\lambda}^{\infty}\frac{\exp(-y)}{y}dy \tag{1}$$

ここで， $\lambda=\dfrac{Sr^2}{4Tt}$，$T$：透水量係数 [$L^2$/T]，$S$：貯留係数 [－]，$s$：水位低下量 [L]，$Q$：揚水流量 [$L^3$/T]。

この式の級数展開は次式で表すとことができる。同級数展開式の誘導は，別資料（**資料 3-05**）にて解説する。

$$\int_{\lambda}^{\infty}\frac{\exp(-y)}{y}dy=W(\lambda)=-\log_e(\lambda)-\gamma-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\lambda^k}{k\cdot k!} \tag{2}$$

ここで，γ：Euler（オイラー）定数＝0.577215665. . . .， また，（1)および(2)式の関数は地下水学では井戸関数と呼ぶ。(ネット上では，γ 値は

0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672348848677267776646709369470632917467495….を紹介しているが，実用上 15 桁程度用いれば十分であろう）

さて，ここで，(2)式にて λ が小さくなると(2)式右辺総和内が無視できるとして，次式が提案されている。

$$W(\lambda)=-\log_e(\lambda)-\gamma \tag{3}$$

(3)式は片対数軸（$1/\lambda$ 軸を対数化）上では直線になり，後述するようにこの特性を用いて Cooper and Jacob (1946)は直線勾配法による揚水試験結果の整理方法を提案しており，この方法はわが国でもきわめて広く普及している。

(2) 近似直線勾配式の活用

1）Cooper-Jacob 法の理論背景

この手法の説明は次式から始めることができる。

$$\frac{s}{Q/4\pi T}=W(\lambda)$$

$$=-\log_e(\lambda)-\gamma=\log_e\left(\frac{4Tt}{Sr^2}\right)-\gamma=\log_e(t)+\log_e\left(\frac{4T}{S_r^2}\right)-\gamma$$

ここで， $\gamma=\log_e[\exp(\gamma)]$ であることから，上式は以下となる。

$$\frac{s}{Q/4\pi T}=\log_e(t)+\log_e\left(\frac{4T}{Sr^2}\frac{1}{\exp(\gamma)}\right)$$

さらに,

$$s=\frac{Q}{4\pi T}\left\{\log_e(t)+\log_e\left(\frac{4T}{Sr^2}\frac{1}{\exp(\gamma)}\right)\right\}\text{ あるいは，}\quad s=\frac{Q}{4\pi T}\left\{\log_e\left(\frac{t}{r^2}\right)+\log_e\left(\frac{4T}{S}\frac{1}{\exp(\gamma)}\right)\right\}$$

また，実務では図式処理するため対数は自然対数より常用対数が使いやすいため以下となる。

$$s=\frac{2.3026Q}{4\pi T}\left\{\log_{10}(t)+\log_{10}\left(\frac{4T}{Sr^2}\frac{1}{\exp(\gamma)}\right)\right\}\text{ あるいは，}\quad s=\frac{2.3026Q}{4\pi T}\left\{\log_{10}\left(\frac{t}{r^2}\right)+\log_{10}\left(\frac{4T}{S}\frac{1}{\exp(\gamma)}\right)\right\}$$

これにより，片対数軸紙上で，算術軸に水位低下量 s をとり，前者であれば対数軸 (t)，後者であれば (t/r^2) をとり，いずれの場合でもの直線勾配が $(2.3026Q/4\pi T)$となり，これより T を求めることができる。また，直線を s=0 軸まで延長し，その切片を得ると，いずれの場合も結果的に以下の等式を満たすものとなる。

$$\log_{10}\left(\frac{t}{r^2}\right)+\log_{10}\left(\frac{4T}{S}\frac{1}{\exp(\gamma)}\right)=0$$

よって，

$$\frac{S\exp(\gamma)}{4T}=\frac{t}{r^2}\text{ より，}\quad S=\frac{4Tt}{\exp(\lambda)r^2}$$

ここで，$\exp(\gamma)=1.781072416$ より，$1/\exp(\gamma)=0.561459484$。

これより，

$$S=\frac{2.24584Tt}{r^2}$$

以上のように，オイラー定数，自然常用対数の換算係数を数値化した結果だけ見ると，ただの係数であるが，このような誘導の結果を示したにすぎない。

2）Thiem（定常）型の整理方法の理論背景

片対数軸上 $\log(r)-s$ プロットを非定常データに適用することができる。

まず，距離の異なる観測点 r_1 および r_2 を考える。ある時間 t におけるこれらの位置に対する λ はそれぞれ以下となる。

$$\lambda_1=\frac{Sr_1^2}{4Tt}\quad\text{および}\quad\lambda_2=\frac{Sr_2^2}{4Tt}$$

このとき，それぞれの観測点での水位低下量 s は以下となる。

$$s_1=\frac{Q}{4\pi T}W(\lambda_1)=\frac{Q}{4\pi T}\{-\log_e(\lambda_1)-\gamma\}\quad\text{および}\quad s_2=\frac{Q}{4\pi T}W(\lambda_1)=\frac{Q}{4\pi T}\{-\log_e(\lambda_2)-\gamma\}$$

これら水位低下量の差分を見る。

$$s_1-s_2=\frac{Q}{4\pi T}\{\log_e(\lambda_2)-\log_e(\lambda_1)\}=\frac{Q}{4\pi T}\left\{\log_e\frac{(\lambda_2)}{\lambda_1}\right\}=\frac{Q}{4\pi T}\left\{\log_e\frac{r_2^2}{r_1^2}\right\}$$
$$=\frac{Q}{2\pi T}\left\{\log_e\frac{r_2}{r_1}\right\}$$

この式は，Thiem 式として知られる，定常式である。つまり，いくつかの観測点での水位低下挙動が，直線勾配近似の適用範囲に入るものは，非定常状態であっても，定常状態として整理ができることがわかる。

さらに，定常式から得られる影響圏半径 R をこの場合に検討すると以下となる。

ここで，$R(t)=r_2$，$s_2=0$ とする。

$$s_1=\frac{Q}{2\pi T}\left\{\log_e\frac{R(t)}{r_1}\right\}=\frac{Q}{4\pi T}\left\{\log_e\frac{R(t)^2}{r_1^2}\right\}$$

また，s_1 は先述のように以下である。

$$s_1 = \frac{Q}{4\pi T}\left\{-\log_e\left(\frac{Sr_1^2}{4Tt}\right)-\gamma\right\} = \frac{Q}{4\pi T}\left\{-\log_e\left(\frac{Sr_1^2\exp(\gamma)}{4Tt}\right)\right\}$$

これらより，

$$\frac{R(t)^2}{r_1^2} = \frac{4Tt}{Sr_1^2\exp(\gamma)} \quad \text{よって，} \quad R(t)^2 = \frac{4Tt}{S\exp(\gamma)} = \frac{2.2458Tt}{S}$$

これより，以下となる。

$$R(t) = \sqrt{\frac{2.2458Tt}{S}} = 1.49859\sqrt{\frac{Tt}{S}}$$
$$\cong 1.5\sqrt{\frac{Tt}{S}}$$

この式は van Poolen が示したとされる影響圏半径の非定常公式として紹介されているものである。

3）回復試験結果の整理方法の理論背景（その 1）

揚水開始後，時間 t_0 で揚水を止める。$t>t_0$ では以下の重ねあわせとする。

$$\lambda_1 = \frac{Sr}{4Tt} \quad \text{および} \quad \lambda_2 = \frac{Sr}{4T(t-t_0)}$$

このときのそれぞれの揚水流量で観測点での水位低下量 s は以下となる。ここでは，t=0 からの揚水は Q のまま継続し，$t>t_0$ では同じ流量を注水する（$-Q$ で揚水）こととして，それぞれの結果である水位低下量（注水の場合は水位上昇となるため，負の水位低下量）を重ね合わせることになる。

$$s_1 = \frac{Q}{4\pi T}\{-\log_e(\lambda_1)-\gamma\} \quad \text{および} \quad s_2 = \frac{-Q}{4\pi T}\{-\log_e(\lambda_2)-\gamma\}$$

これらを重ね合わせて，揚水停止後の水位低下量 s を得る

$$s = s_1 + s_2 = \frac{Q}{4\pi T}\{-\log_e(\lambda_1)-\gamma\} + \frac{-Q}{4\pi T}\{-\log_e(\lambda_2)-\gamma\} = \frac{Q}{4\pi T}\{\log_e(\lambda_2)-\log_e(\lambda_1)\}$$
$$= \frac{Q}{4\pi T}\left\{\log_e\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right\} = \frac{Q}{4\pi T}\log_e\left(\frac{t}{t-t_0}\right) = \frac{2.3026Q}{4\pi T}\log_{10}\left(\frac{t}{t-t_0}\right)$$

測定を長い時間継続すると，水位低下量 s は 0 に近づくことは明らかであるが，このとき，$t/(t-t_0)$は 1 に収束を見せる。

4）回復試験結果の整理方法の理論背景（その 2）

ここでは，残留低下量に着目している。$t=t_0$ での水位低下量を s_0 とし，s_0 からの回復量を s'として算定する。ここで，$\lambda_0 = \frac{Sr}{4Tt_0}$ である。

$$s' = s_0 - \{s_1 + s_2\} = \frac{Q}{4\pi T}\{-\log_e(\lambda_0)-\gamma\} - \left[\frac{Q}{4\pi T}\{-\log_e(\lambda_1)-\gamma\} + \frac{-Q}{4\pi T}\{-\log_e(\lambda_2)-\gamma\}\right]$$
$$= \frac{Q}{4\pi T}\{-\log_e(\lambda_0)-\gamma\} - \frac{Q}{4\pi T}\left\{\log_e\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right\} = \frac{Q}{4\pi T}\left\{-\log_e\left(\frac{\lambda_P\lambda_2\exp[\gamma]}{\lambda_1}\right)\right\}$$
$$= \frac{Q}{4\pi T}\log_e\left(\frac{4Tt}{Sr^2(t-t_0)t_0\exp(\lambda)}\right) = \frac{2.3026Q}{4\pi T}\log_{10}\left(\frac{2.2458Tt}{Sr^2(t-t_0)t_0}\right)$$

上式は，従前の Cooper-Jacob 図解法において時間軸 t を $t/(t-t_0)$，s を s'と置き換えることで，全く同じ作業であり，この式を適用することで，回復試験結果から T だけでなく S も評価できる。

(3) 留意点

本稿で紹介した方法は，いずれも Theis 式である井戸関数式が直線近似式で代用できる時間範囲であることを前提にしたものである。このため，いずれの場合も対象としている状態が直線近似の適用範囲内にあることが必要とされる。例えば，回復試験で揚水停止直後の注水による水位低下量 s_2 は近似直線には適合しておらず，暫くしてから適用範囲に乗ってくる。加えて，揚水停止時には s_1（このときは s_0）も近似直線の適用内でなければならない。ここで，留意すべきは，適用範囲が $u<0.01$ という十分に長い時間がたっておればよいというものではないことであある。これは，Theis 理論が長い時間揚水すると水位低下量が理論から外れてくることがある。例えば，帯水層を上下で隣接する半透水性層からの漏水現象や島モデル（赤井ら [1] にみられるような有限影響圏半径境界がある場合などでは，長時間揚水試験を継続すると明らかに水位低下量プロットは Theis 曲線から逸脱する。

回復試験は，定常を確認してから揚水を停止すると考えられていた時代があったようであるが，これは誤りで，Theis 曲線（ここでは近似直線）に乗っている状態からの回復試験でないと理論上，適さないのである。これを誤ると“測定を長い時間継続すると，水位低下量 s は 0 に近づくことは明らかであるが，このとき，$t/(t-t_o)$は 1 に収束”を見せないことになる。

【参考文献】

1） 赤井浩一，大西有三，西垣誠：揚水解析における影響圏の算定と排水設計への適用，土木学会論文報告集，No. 268，pp. 91−98，1977.