標準曲線一致法の解説

現場透水試験結果の整理及び解析において，標準曲線一致法は多用される技法であり，種々開発されている新たな帯水層モデルとの適合においても，強力なツールとしてその基本原理は活用されるものである。ここでは，この技法の理論背景を紹介し，パーソナルコンピュータレベルでも活用可能な方法を紹介する。

1. 標準曲線一致法の背景理論

以下の，Theis の井戸関数 $W(\lambda)$での適用を考えてみる。

$$W(\lambda)=\int_{\lambda}^{\infty}\frac{\exp(-\lambda)}{\lambda}d\lambda \tag{1}$$

$$\lambda=\frac{Sr^2}{4Tt} \tag{2}$$

井戸関数 W は，試験測定項目や帯水層定数と以下の関係を有す。

$$s=\left(\frac{Q}{4\pi T}\right)W(\lambda) \tag{3}$$

$$t=\left(\frac{Sr^2}{4T}\right)\frac{1}{\lambda} \tag{4}$$

式(3)，(4)をみると，測定値である水位低下量 s は井戸関数値 W，試験開始後の経過時間 t は$(1/\lambda)$と，それぞれの比例関係を示していることになる。そこで以下のように整理してみる。

$$\frac{s}{W(\lambda)}=\left(\frac{Q}{4\pi T}\right) \tag{5}$$

$$\frac{t}{(1/\lambda)}=\left(\frac{Sr^2}{4T}\right) \tag{6}$$

このように整理すると，測定値と標準値の比が試験結果として望まれる帯水層の主定数を表しているといえ，この関係は，（理想的あるいは理論的に云えば）全ての時間でそれぞれ同じ比になっているはずであり，そういう状態を探し出せばいい。

具体的には，以下の手順である。

① (6)式において定数項となる$(Sr^2/4T)$を適宜試行し，試験の測定時間に対する λ を仮設定する。
② 仮設定された λ に対する $W(\lambda)$を求め，(5)式の係数項$(Q/4\pi T)$値を測定時間毎の s に対して求める。
③ ②で求めた測定時間ごとの$(Q/4\pi T)$値が一定とみなされるまで①に戻り，この手順を繰り返す。
④ 最終的に，$(Q/4\pi T)$値と$(Sr^2/4T)$値が設定できることになる。
⑤ ここで，Q, r は試験条件から決められるため，T および S/T が係数式から得られ，T, S が決定される。

このような作業では，描画された標準曲線や測定値のプロットも出てこないので，何が標準曲線一致法なのか良く分からない。

実際，後述するようにスプレッドシート（表計算）アプリケーションを活用すれば，上述の①～⑤の手順は，それほど苦にはならない。しかし，メモリー機能すらない電卓や算盤レベルの活用では，上述の手順は気の遠くなるような膨大な作業量であるといえるだろう。つまり，この手順はかなり面倒臭いのであり，そのような作業は間違いも生じやすい。

ここで，“対数標記”という画期的な技が登場する（以下の経緯は，筆者の独自の解釈であり，曲線一致法を発表した Wenzel(1942)にも，1937 年に Theis との個人的なやり取りから得た suggestion としか記されていない)。

まず，井戸関数 $W(\lambda)-1/\lambda$ をグラフに描いてみよう。算術軸にこれを描いてみると，それぞれの値の小さいところは全く使い物にならず，比較的後半の値しかグラフ上で識別できないことが分かる（数表の値を

入力しなくても，近似式を表計算アプリケーションで数値化すれば容易である。是非試していただきたい)。1940 年代にどの程度の知見があったか分からないが，“対数化”すれば小さい値は拡大され大きな値は縮小され，一枚のグラフ紙上で“一気通貫”できるのである。

さらに，手順①②で行う(6)式の係数を仮設定し，W 値を求めたグラフを描くと，対数グラフ上では標準曲線 W のグラフは，見事なまでに水平移動する。同じように，(5)式の係数項を仮設定して同様のプロットを見比べると，ここでも見事に上下（垂直）方向に平行移動する。

ということは，仮設定した係数項に対して一々計算しなくても，対数軸上ではグラフを，適宜，上下水平に移動すればいいことになる。では，(5)，(6)式も対数で書いておこう（図での使い勝手を加味して常用対数を使う)。

$$\log_{10}\left(\frac{s}{W(\lambda)}\right)=\log_{10}\left(\frac{Q}{4\pi T}\right) \tag{7}$$

$$\log_{10}\left[\frac{t}{(1/\lambda)}\right]=\log_{10}\left(\frac{Sr^2}{4T}\right) \tag{8}$$

さらに以下のように展開できる。

$$\log_{10}(s)-\log_{10}(W(\lambda))=\log_{10}\left(\frac{Q}{4\pi T}\right) \tag{9}$$

$$\log_{10}(t)-\log_{10}(1/\lambda)=\log_{10}\left(\frac{Sr^2}{4T}\right) \tag{10}$$

測定値と標準値は，これまで比例関係にあるため倍率で考えてきたが，対数で示すと差分で表すことができる。さらに，先述のように，倍率を考慮した値のプロットは，上下水平に平行移動することであられるという特性から，以下のように考えることができる。

$$\log_{10}(s)-\log_{10}\left[\left(\frac{Q}{4\pi T}\right)W(\lambda)\right]=0 \tag{11}$$

$$\log_{10}(t)-\log_{10}\left[\left(\frac{Sr^2}{4T}\right)(1/\lambda)\right]=0 \tag{12}$$

(11)，(12)式の値が 0 になるということは，理想的あるいは理論的には測定値 s, t と適切な倍率を掛けた標準値 W，$(1/\lambda)$が“一致した”ということである。

これが，標準曲線一致法の基本原理である。

2. 一般的な標準曲線一致法の手順

一般的な標準曲線一致法の手順を追ってみる。

① 同じスケールの対数グラフ用紙（Theis の井戸式のように，s および t のいずれにも平行移動させる場合には両対数軸用紙）を用意する。ここで同じスケールとは，１対数サイクルの実長が同じものと言う意味である。

② それぞれに，標準曲線 W－$1/\lambda$，水位低下量 s－t をプロットする。技法の説明では，時間軸を逆数として扱う場合があり，このときは，W─λ，s－$1/t$ となる。用紙は，少なくともどちらかが透視できる薄紙仕様が望ましい。

③ これらを重ね合わせ，水平鉛直のそれぞれを平行に保ち，両プロット群が最も良く一致する状態を探す。

④ ここで任意の座標点を記録する。即ち，$(1/\lambda^*, W^*)$，(t^*, s^*)である。これまでの解説で，$(1/\lambda)^*$と t^*，W^*と s^*の関係が，それぞれのパラメータの倍率を表す，即ち式(5)，(6)の係数項を求める関係になることは明白であろう。従って，次式が成り立つ。

$$\frac{s*}{W*}=\left(\frac{Q}{4\pi T}\right) \tag{13}$$

$$\frac{t*}{(1/\lambda)*}=\left(\frac{Sr^2}{4T}\right) \tag{14}$$

⑤ (13)式から，T を得，(14)式にこの T も代入して S を得る。
⑥ 複数の標準曲線がある場合には，曲線ごとの表す指標の持つ定義に従って所要のパラメータを算定する。

3. 改良した標準曲線一致法

2. で示した方法は，面倒が伴う。勿論，技術を身につけるという観点で一度ならず二度三度と一般的な技法は実施していただきたい。しかしながら，現場でもパソコンなどが手軽に使える時代であり，測定も細かい測定間隔で大量に取得できる時代であることから，机上計算での活用を提案しておく。

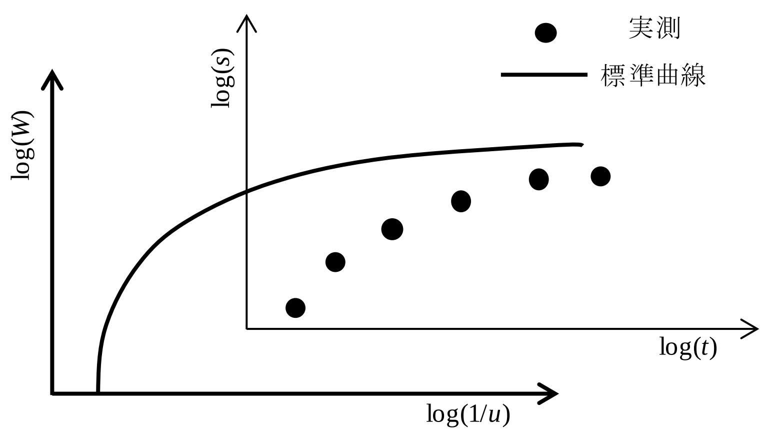
(1) 表計算ソフトおよび描画機能を用いる技法

① 表計算シートに，試験結果 t, s，標準曲線 $1/\lambda, W$ のカラムを用意し，これに入力しておく。
② 測定結果に倍率 n および m を考慮した計算用のカラムを新たに用意し，$n\cdot t$，$m\cdot s$ を計算する。この時，n および m をそれぞれ任意に設定し，その都度計算が出来るようにしておく。
③ 常用両対数軸に，($n\cdot t$，$m\cdot s$)および((1/λ)，W)のそれぞれの値を描画する。
④ 描画結果を目視確認しながら，n および m を変更し，両プロット群が最も良く合うときの n および m を結果とする。
⑤ ここで，以下の関係である。

$$m=\frac{W}{s}=\left(\frac{4\pi T}{Q}\right) \tag{15}$$

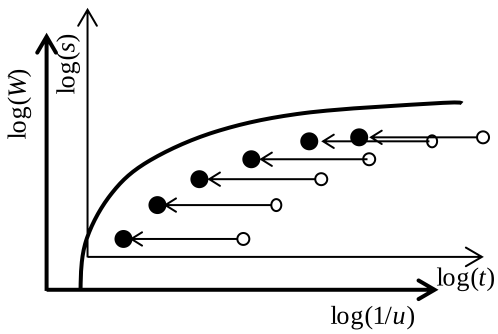
$$n=\frac{(1/\lambda)}{t}=\left(\frac{4T}{Sr^2}\right) \tag{16}$$

n, m 二種類のパラメータを逐次変更することは一見煩雑に思えるが，実際やってみると比較的簡単にこつをつかむことが出来る。図-１に技法の模式図を示しておくので，参考にされたい。



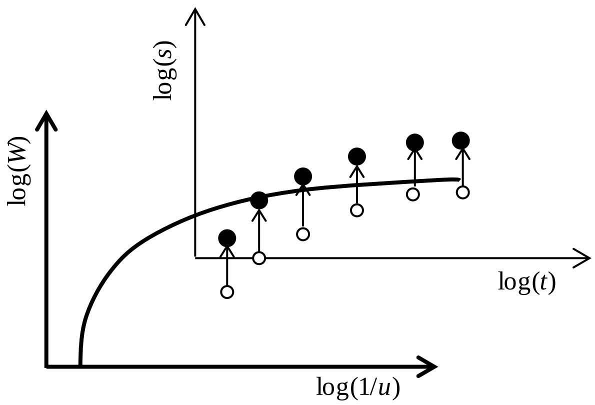
(a) 標準曲線と計算結果のプロット

図-1　表計算および描画機能を用いる技法



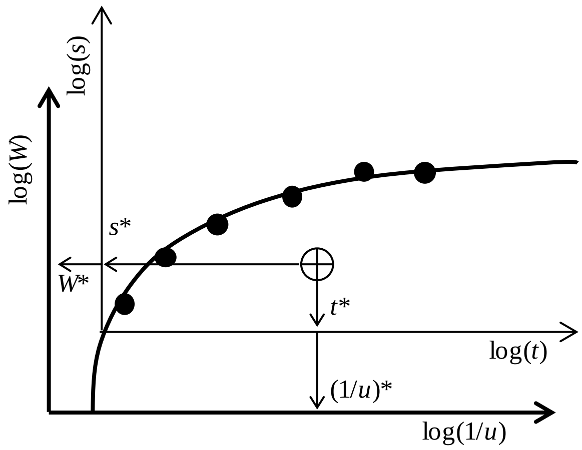
(b) 時間軸方向の移動

（パラメータ nによる）



(c) 水位低下軸方向の移動

（パラメータ mによる）



(d) マッチング状況

図-1　表計算および描画機能を用いる技法（続き）

(2) 一致精度の算定

(1)では，一般的な標準曲線一致法を計算機で実施する前提で説明したが，目視による一致では一致の程度が数値化できない。帯水層モデルにもよるが，例えば Theis 式であれば表計算アプリケーションでも計算できる近似解が提案されていることから，測定結果に対応した標準値を用意することもできる。

(16)式から，(1)で導入した倍率 n を用いると，測定時間 t に対応した$(1/\lambda)=n\cdot t$ となる。これより，$\lambda=1/(n\cdot t)$となる。この λ に対する関数値 $W(\lambda)$を計算機で個々に求めることができる場合がある。この計算関数値 $W(\lambda)$と倍率 m を用いて設定した W との比較を行う。これらの差を残差二乗和などにまとめることで，目視という感覚だけではなく定量的な指標として曲線一致法の結果をまとめることが出来る。

原始的には，測定点毎に重みはつけずにそのまま合算することにもなろうが，揚水試験で測定間隔が可変させた場合には，早い時間と遅い時間では測定値の重みに差が生じることから，重み付残差二乗和とした整理も有効である。このとき，重み算定には，全測定時間に対する測定点の時間間隔が個々の重みになり，ここでも対数上の重み評価とするほうが望ましい。

(3) さらなる合理化

手作業で行ってきた標準曲線一致法を，計算機を用いて実施する技法を(1)，(2)で説明した。既往の目視を前提としたレベルでは，時間軸と水位低下量軸の二軸それぞれに対応した倍率，ここでは n，m，を手入力で更新することでマッチングを行うことに大きな問題はないだろう。しかし，複数の標準曲線から適切な曲線とのマッチングが必要となる場合もある。例えば，漏水性帯水層や島モデルのような場合である。このようなケースでは，試行錯誤する m や n といったパラメータは少ない方がいい。

そこで，1. で説明した基本原理に立ち戻って考えてみる。

曲線一致法は，図式解法におけるテクニックであり，原理では，全ての測定点に対して(9)，(10)式が成立することである。

$$\log_{10}(s)-\log_{10}(W(\lambda))=\log_{10}\left(\frac{Q}{4\pi T}\right) \tag*{(9)再掲}$$

$$\log_{10}(t)-\log_{10}(1/\lambda)=\log_{10}\left(\frac{Sr^2}{4T}\right) \tag*{(10)再掲}$$

ここで，(9)式に着目してみると，各測定時間で左辺が一定になっている状態がマッチングできた状態である。そこで，以下の手順を提案する。

① 試行倍率 n を設定し，測定時間 t に対応した$(1/\lambda)=n\cdot t$ から，各測定時間 t に対応した λ を算定する。

② λ に対する井戸関数 $W(\lambda)$を求める

③ (9)式に同じ測定時間の s と W を次式に入力する

$$f_i=\log_{10}(s_i)-\log_{10}(W(\lambda_i)) \tag{17}$$

④ 対象とする観測点に対して，f_iの平均値 $\overline{f}$ と，分散 v を得る。

⑤ 対象とする全ての観測点で(9)式が一定値として成立した際には，標準曲線と測定値プロットが一致あるいは平行状態にあり，このとき，分散 v は 0 または十分に 0 とみなせるほど小さな値をとるといえる。

⑥ 分散値 v が最小となるときの平均 $\overline{f}$ を $\overline{f}_{OPT}$，またこのときの n を n_{OPT} とする。

⑦ 次式から，マッチング結果が誘導できる。

$$10^{\overline{f}_{OPT}}=\frac{W}{s}=\left(\frac{4\pi T}{Q}\right) \tag{18}$$

$$n_{OPT}=\frac{(1/\lambda)}{t}=\left(\frac{4T}{Sr^2}\right) \tag{19}$$

この技法により，実際に試行するパラメータは n だけに縮減できることになる。

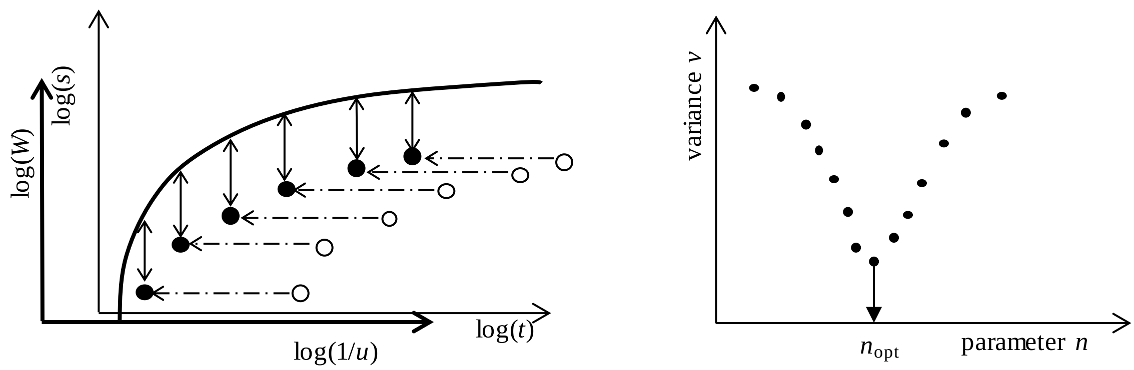


図-2　平行状態でのマッチング技法