特殊関数の簡略式などの整理

現場透水試験結果の理論解析で良く使う特殊関数の簡略式をまとめておく。これは，関数式の組み合わせによって複雑になるのを簡略式で書き直すことで，計算機内での 0 割や無限大になることをできるだけ防ぎ，計算範囲を拡大することも目的としている。

収録した特殊関数の目次：

1）指数積分関数(Theis 井戸公式)：exponential integral func.

2）誤差・余誤差関数：error and complemental error func.

3）第 1, 2 種修正 0, 1 次 Bessel 関数：the 1st and 2nd kind-the 0 and 1st order modified Bessel func.

4）第 1, 2 種 0, 1 次 Bessel 関数：the 1st and 2nd kind-the 0 and 1st order Bessel func.

1）指数積分関数（Abramowitz and Stegun, 1972）

$$\int_{\lambda}^{\infty}\frac{\exp(-y)}{y}dy=E_1(\lambda)=-\log_e(\lambda)-\gamma-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\lambda^k}{k\cdot k!} \tag{1-1}$$

ここで，γ：Euler（オイラー)定数＝0.5772156649･･･，（ネット上では，γ 値は，0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672348848677267776646709369470632917467495….と紹介されている)。

<u>① λが十分に小さいとき（進士, 2016）</u>

$$E_1(\lambda)=-\gamma-\log_e(\lambda)+\varepsilon(\lambda),\ |\varepsilon(\lambda)|\approx\lambda$$

<u>② 0≤λ≤1 のとき（Allen,1954）</u>

$$E_1(\lambda)+\log_e(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+a_3\lambda^3+a_4\lambda^4+a_5\lambda^5+\varepsilon(\lambda) \tag{1-2}$$

ただし，$|\varepsilon(\lambda)|<2\times10^{-7}$

a_0=－0.57721 566　a_1=　0.99999 193　a_2=－0.24991 055

a_3=　0.05519 968　a_4=－0.00976 004　a_5=　0.00107 857

<u>③ 1≤λ≤∞のとき</u>

$$\lambda e^{\lambda}E_1(\lambda)=\frac{\lambda^4+a_1\lambda^3+a_2\lambda^2+a_3\lambda+a_4}{\lambda^4+b_1\lambda^3+b_2\lambda^2+b_3\lambda+b_4}+\varepsilon(\lambda)$$

$$=\frac{\lambda^4+a_1\lambda^3+a_2\lambda^2+a_3\lambda+a_4}{\lambda^4+b_1\lambda^3+b_2\lambda^2+b_3\lambda+b_4}\frac{1/\lambda^4}{1/\lambda^4}+\varepsilon(\lambda)=\frac{1+\frac{a_1}{\lambda}+\frac{a_2}{\lambda^2}+\frac{a_3}{\lambda^3}+\frac{a_4}{\lambda^4}}{1+\frac{b_1}{\lambda}+\frac{b_2}{\lambda^2}+\frac{b_3}{\lambda^3}+\frac{b_4}{\lambda^4}}+\varepsilon(\lambda) \tag{1-3}$$

ただし，$\lambda\le100$ では $|\varepsilon(\lambda)|<2\times10^{-8}$

a_1=　8.57332 87401　a_2= 18.05901 69730

a_3=　8.63476 08925　a_4=　0.26777 37343

b_1=　9.57332 23454　b_2= 25.63295 61486

b_3= 21. 09965 30827　b_4=　3.95849 69228

2）誤差・余誤差関数(Abramowitz & Stegun, 1972)

誤差関数：$erf(z)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z\exp(-t^2)dt$

余誤差関数：$erfc(z)=1-erf(z)$　(2-1)

$$erf(-z) = -erf(z) \tag{2-2}$$

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!(2n+1)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \cdot z^{2n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots\ldots (2n+1)} \tag{2-3}$$

$$erf(x) = 1 - (a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5) \exp(-x^2) + \varepsilon(x), \quad t = \frac{1}{1+px} \tag{2-4}$$

$|\varepsilon(x)| \leq 1.5\times 10^{-7}$，$p$=0.32759 11,

a_1=　0.25482 9592，a_2=－0.28449 6736，a_3=1.42141 3741,

a_4=－1.45315 2027，a_5=　1.06140 5429,

$$erf(x) = 1 - \frac{1}{\left[1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6\right]^{16}} + \varepsilon(x) \tag{2-5}$$

$|\varepsilon(x)| \leq 3\times 10^{-7}$,

a_1=0.07052 30784，a_2=0.04228 20123，a_3=0.00927 05272,

a_4=0.00015 20143，a_5=0.00027 65672，a_6=0.00004 30638

x<0.1 のとき，$erf(x) \approx \dfrac{2x}{\sqrt{\pi}}$　(Hantush, 1964)　(2-6)

x>9 のとき，$erf(\sqrt{x}) \approx \dfrac{\exp(-x)}{\sqrt{\pi x}}$　(Hantush, 1964)　(2-7)

3) Bessel 関数：第 1，第 2 種修正ベッセル関数(Abramowitz and Stegun,1972)

a) 第 1 種 0 次修正ベッセル関数

①　$$I_0(z) = 1 + \frac{(z^2/4)}{(1!)^2} + \frac{(z^2/4)^2}{(2!)^2} + \frac{(z^2/4)^3}{(3!)^2} + \cdots\cdots = 1 + \frac{(z/2)^2}{(1!)^2} + \frac{(z/2)^4}{(2!)^2} + \frac{(z/2)^6}{(3!)^2} + \cdots\cdots$$

②　z が大きな場合，ここで，μ=4v^2

$$I_v(z) \approx \frac{\exp(z)}{\sqrt{2\pi z}} \left\{ \begin{array}{l} 1 - \dfrac{\mu-1}{8z} + \dfrac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8z)^2} - \dfrac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3!(8z)^3} \\ + \dfrac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)(\mu-49)}{4!(8z)^4} - \dfrac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)(\mu-49)(\mu-81)}{5!(8z)^5} \cdots\cdots \end{array} \right\}$$

v=0 より，μ=0，よって

$$I_0(z) \approx \frac{\exp(z)}{\sqrt{2\pi z}} \left\{ 1 + \frac{1}{8z} + \frac{9}{2!(8z)^2} + \frac{(9)(25)}{3!(8z)^3} + \frac{(1)(9)(25)(49)}{4!(8z)^4} + \frac{(1)(9)(25)(49)(81)}{5!(8z)^5} + \cdots\cdots \right\}$$

③

$$-3.75 \leq x \leq 3.75 \quad t \equiv x/3.75$$
$$I_0(x) = a_0 + a_2 t^2 + a_4 t^4 + a_6 t^6 + a_8 t^8 + a_{10} t^{10} + a_{12} t^{12} + \varepsilon \qquad |\varepsilon| < 1.6\times 10^{-7}$$
$$a_0 = 1 \quad a_2 = 3.51562\,29 \quad a_4 = 3.08994\,24 \quad a_6 = 1.20674\,92 \quad a_8 = 0.26597\,32$$
$$a_{10} = 0.0360768 \quad a_{12} = 0.0045813$$

④

$$3.75 \le x < \infty \quad t \equiv x/3.75$$

$$\sqrt{x}\exp(-x)I_0(x) = a_0 + a_1 t^{-1} + a_2 t^{-2} + a_3 t^{-3} + a_4 t^{-4} + a_5 t^{-5} + a_6 t^{-6} + a_7 t^{-7} + a_8 t^{-8} + \varepsilon$$

$$|\varepsilon| < 1.9 \times 10^{-7}$$

$a_0 = 0.39894\,228$　$a_1 = 0.01328\,592$　$a_2 = 0.00225\,319$　$a_3 = -0.00157\,565$　$a_4 = 0.00916\,281$
$a_5 = -0.02057\,706$　$a_6 = 0.02635\,537$　$a_7 = -0.01647\,633$　$a_8 = 0.00392\,377$

b）第 1 種 1 次修正ベッセル関数

①

$$I_1(z) = \frac{d}{dz}\left[I_0(z)\right] = \frac{\frac{2}{z}(z/2)^2}{(1!)^2} + \frac{\frac{4}{z}(z/2)^4}{(2!)^2} + \frac{\frac{6}{z}(z/2)^6}{(3!)^2} + \cdots\cdots = \frac{(z/2)}{(1!)^2} + \frac{2(z/2)^3}{(2!)^2} + \frac{3(z/2)^5}{(3!)^2} + \cdots\cdots$$

② z が大きな場合，ここで，$\mu \equiv 4\nu^2$

$$I_\nu(z) \approx \frac{\exp(z)}{\sqrt{2\pi z}}\left\{\begin{aligned}&1 - \frac{\mu-1}{8z} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8z)^2} - \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3!(8z)^3}\\ &+ \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)(\mu-49)}{4!(8z)^4} - \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)(\mu-49)(\mu-81)}{5!(8z)^5}\cdots\cdots\end{aligned}\right\}$$

$\nu=1$ より，$\mu=4$

$$I_1(z) \approx \frac{\exp(z)}{\sqrt{2\pi z}}\left\{\begin{aligned}&1 - \frac{4-1}{8z} + \frac{(4-1)(4-9)}{2!(8z)^2} - \frac{(4-1)(4-9)(4-25)}{3!(8z)^3}\\ &+ \frac{(4-1)(4-9)(4-25)(4-49)}{4!(8z)^4} - \frac{(4-1)(4-9)(4-25)(4-49)(4-81)}{5!(8z)^5}\cdots\cdots\end{aligned}\right\}$$

$$= \frac{\exp(z)}{\sqrt{2\pi z}} - \left\{1 - \frac{3}{8z} - \frac{(3)(5)}{2!(8z)^2} - \frac{(3)(5)(21)}{3!(8z)^3} - \frac{(3)(5)(21)(45)}{4!(8z)^4} - \frac{(3)(5)(21)(45)(77)}{5!(8z)^5}\cdots\cdots\right\}$$

③

$$-3.75 \le x \le 3.75 \quad t \equiv x/3.75$$

$$\frac{1}{x}\cdot I_1(x) = a_0 + a_2 t^2 + a_4 t^4 + a_6 t^6 + a_8 t^8 + a_{10} t^{10} + a_{12} t^{12} + \varepsilon \qquad |\varepsilon| < 8 \times 10^{-9}$$

$a_0 = 0.5$　$a_2 = 0.87890\,594$　$a_4 = 0.51498\,869$　$a_6 = 0.15084\,934$　$a_8 = 0.02658\,733$
$a_{10} = 0.00301\,532$　$a_{12} = 0.00032\,411$

④

$$3.75 \le x < \infty \quad t \equiv x/3.75$$

$$\sqrt{x}\exp(-x)I_1(x) = a_0 + a_1 t^{-1} + a_2 t^{-2} + a_3 t^{-3} + a_4 t^{-4} + a_5 t^{-5} + a_6 t^{-6} + a_7 t^{-7} + a_8 t^{-8} + \varepsilon$$

$$|\varepsilon| < 2.2 \times 10^{-7}$$

$a_0 = 0.39894\,228$　$a_1 = -0.03988\,024$　$a_2 = -0.00362\,018$　$a_3 = 0.00163\,801$　$a_4 = -0.01031\,555$
$a_5 = 0.02282\,967$　$a_6 = -0.02895\,312$　$a_7 = 0.01787\,654$　$a_8 = -0.00420\,059$

c）第 2 種 0 次修正ベッセル関数

①

$$K_0(z)=-\left\{\gamma+\log_e\left(\frac{z}{2}\right)\right\}I_0(z)+\frac{\left(z^2/4\right)}{(1!)^2}+\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{\left(z^2/4\right)^2}{(2!)^2}+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{\left(z^2/4\right)^3}{(3!)^2}+\cdots\cdots$$

$$=-\left\{\gamma+\log_e\left(\frac{z}{2}\right)\right\}I_0(z)+\frac{(z/2)^2}{(1!)^2}+\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{(z/2)^4}{(2!)^2}+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{(z/2)^6}{(3!)^2}+\cdots\cdots$$

② $z<0.05$ のとき，$K_0(z)\approx-\left\{\log_e\left(\frac{z}{2}\right)+\gamma\right\}$ (Hantush, 1964)

③ z が大きな場合，ここで，$\mu\equiv4\nu^2$

$$K_\nu(z)\approx\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\exp(-z)\left\{\begin{aligned}&1+\frac{\mu-1}{8z}+\frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8z)^2}+\frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3!(8z)^3}\\&+\frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)(\mu-49)}{4!(8z)^4}+\frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)(\mu-49)(\mu-81)}{5!(8z)^5}+\cdots\cdots\end{aligned}\right\}$$

$\boldsymbol{\nu}=0$ より，$\mu=0$

$$K_0(z)\approx\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\exp(-z)\left\{\begin{aligned}&1+\frac{-1}{8z}+\frac{(-1)(-9)}{2!(8z)^2}+\frac{(-1)(-9)(-25)}{3!(8z)^3}\\&+\frac{(-1)(-9)(-25)(-49)}{4!(8z)^4}+\frac{(-1)(-9)(-25)(-49)(-81)}{5!(8z)^5}+\cdots\cdots\end{aligned}\right\}$$

③

$0\le x\le2 \quad t\equiv x/2$

$K_0(x)=-\log_e(t)\cdot I_0(x)+a_0+a_2t^2+a_4t^4+a_6t^6+a_8t^8+a_{10}t^{10}+a_{12}t^{12}+\varepsilon \qquad |\varepsilon|<1\times10^{-8}$

$a_0=-0.57721566 \quad a_2=0.42278420 \quad a_4=0.23069756 \quad a_6=0.03488590 \quad a_8=0.00262698$

$a_{10}=0.00010750 \quad a_{12}=0.00000740$

④

$2\le x<\infty \quad t\equiv x/2$

$\sqrt{x}\exp(x)K_0(x)=a_0+a_1t^{-1}+a_2t^{-2}+a_3t^{-3}+a_4t^{-4}+a_5t^{-5}+a_6t^{-6}+\varepsilon \qquad |\varepsilon|<1.9\times10^{-7}$

$a_0=\ 1.25331414 \quad a_1=-0.07832358 \quad a_2=0.02189568 \quad a_3=-0.01062446 \quad a_4=0.00587872$

$a_5=-0.00251540 \quad a_6=\ 0.00053208$

d）第 2 種 1 次修正ベッセル関数

① ＜※注意：未定稿＞

$$K_1(z)=-\frac{d}{dz}[K_0(z)]=\left\{\gamma+\log_e\left(\frac{z}{2}\right)\right\}I_0'(z)+\left\{\log_e\left(\frac{z}{2}\right)\right\}'I_0(z)-\frac{\frac{2}{z}(z/2)^2}{(1!)^2}-\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{\frac{4}{z}(z/2)^4}{(2!)^2}$$

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{\frac{6}{z}(z/2)^6}{(3!)^2}+\cdots\cdots$$

$$=\left\{\gamma+\log_e\left(\frac{z}{2}\right)\right\}I_1(z)+\left\{\frac{2}{z}\frac{1}{2}\right\}'I_0(z)-\frac{(z/2)}{(1!)^2}-\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{2(z/2)^3}{(2!)^2}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{3(z/2)^5}{(3!)^2}+\cdots\cdots$$

$$=\left\{\gamma+\log_e\left(\frac{z}{2}\right)\right\}I_1(z)+\frac{1}{z}I_0(z)-\frac{(z/2)}{(1!)^2}-\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{2(z/2)^3}{(2!)^2}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{3(z/2)^5}{(3!)^2}+\cdots\cdots$$

② z<0.05 のとき，$K_1(z)\approx\frac{1}{z}$ (Hantush, 1964) (3-7)

③ z が大きな場合，ここで，$\mu\equiv4\nu^2$

$$K_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\exp(-z)\left\{\begin{array}{l}1+\frac{\mu-1}{8z}+\frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8z)^2}+\frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3!(8z)^3}\\+\frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)(\mu-49)}{4!(8z)^4}+\frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)(\mu-49)(\mu-81)}{5!(8z)^5}+\cdots\cdots\end{array}\right\}$$

ν=1 より，μ=4

$$K_1(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\exp(-z)\left\{\begin{array}{l}1+\frac{4-1}{8z}+\frac{(4-1)(4-9)}{2!(8z)^2}+\frac{(4-1)(4-9)(4-25)}{3!(8z)^3}\\+\frac{(4-1)(4-9)(4-25)(4-49)}{4!(8z)^4}+\frac{(4-1)(4-9)(4-25)(4-49)(4-81)}{5!(8z)^5}+\cdots\cdots\end{array}\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\exp(-z)\left\{1+\frac{3}{8z}+\frac{(3)(-5)}{2!(8z)^2}+\frac{(3)(-5)(-21)}{3!(8z)^3}+\frac{(3)(-5)(-21)(-45)}{4!(8z)^4}+\frac{(3)(-5)(-21)(-45)(-77)}{5!(8z)^5}+\cdots\cdots\right\}$$

④

$0 \le x \le 2 \quad t \equiv x/2$

$$xK_1(x) = x\log_e(t)\cdot I_1(x) + a_0 + a_2t^2 + a_4t^4 + a_6t^6 + a_8t^8 + a_{10}t^{10} + a_{12}t^{12} + \varepsilon \qquad |\varepsilon| < 8\times10^{-9}$$

$a_0 = 1 \quad a_2 = \ \ 0.15443144 \quad a_4 = -0.67278579 \quad a_6 = -0.18156897 \quad a_8 = -0.01919402$

$a_{10} = -0.00110404 \quad a_{12} = -0.00004686$

⑤

$2 \le x < \infty \quad t \equiv x/2$

$$\sqrt{x}\exp(x)K_1(x) = a_0 + a_1t^{-1} + a_2t^{-2} + a_3t^{-3} + a_4t^{-4} + a_5t^{-5} + a_6t^{-6} + \varepsilon \qquad |\varepsilon| < 2.2\times10^{-7}$$

$a_0 = 1.25331414 \quad a_1 = \ \ 0.23498619 \quad a_2 = -0.03655620 \quad a_3 = 0.01504268 \quad a_4 = -0.00780353$

$a_5 = 0.00325614 \quad a_6 = -0.00068245$

4) ベッセル関数：第一，第二種ベッセル関数(Abramowitz and Stegun, 1972)

a) 第 1 種 0 次ベッセル関数

① $$J_0(z) = 1-\frac{(z^2/4)}{(1!)^2}+\frac{(z^2/4)^2}{(2!)^2}-\frac{(z^2/4)^3}{(3!)^2}+\cdots\cdots = 1-\frac{(z/2)^2}{(1!)^2}+\frac{(z/2)^4}{(2!)^2}-\frac{(z/2)^6}{(3!)^2}+\cdots\cdots$$

$J_0'(x) = -J_1(x)$ (Hantush, 1964)

② x>0

$J_\nu(x) = M_\nu\cos(\theta_\nu)$

さらに，x が大きい場合　(ここで，μ≡4ν^2)

$$M_\nu{}^2 \approx \frac{2}{\pi x}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{\mu-1}{(2x)^2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{(\mu-1)(\mu-9)}{(2x)^4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{(2x)^6}+\cdots\cdots\right\}$$

$$\theta_\nu \approx x-\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)\pi+\frac{\mu-1}{2(4x)}+\frac{(\mu-1)(\mu-25)}{6(4x)^3}+\frac{(\mu-1)(\mu^2-114\mu+1073)}{6(4x)^3}$$
$$+\frac{(\mu-1)(5\mu^3-1535\mu^2+54703\mu-375733)}{14(4x)^7}$$

③　z＜0.1　$J_0(x) \approx 1$　(Hantush, 1964)

z>16　$J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right)$　(Hantush, 1964)

④ －3≤x≤3　t≡x/3

$$J_0(x) = a_0 + a_2 t^2 + a_4 t^4 + a_6 t^6 + a_8 t^8 + a_{10} t^{10} + a_{12} t^{12} + \varepsilon,\quad |\varepsilon|<5\times10^{-8}$$

ここで，a_0= 1　a_2= －2.24999 97　a_4= 1.26562 08　a_6=－0.31638 66
a_8= 0.04444 79　a_{10}=－0.00394 44　a_{12}= 0.00021 00

3≤x<∞　t≡3/x

$$J_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} f_0 \cos(\theta_0)$$

$$f_0(x) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 + a_6 t^6 + \varepsilon \quad |\varepsilon|<1.6\times10^{-8}$$

$$\theta_0(x) = x + b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5 + b_6 t^6 + \varepsilon \quad |\varepsilon|<7.0\times10^{-8}$$

a_0=0.79788 456　a_1=－0.00000 077　a_2=－0.00552 740　a_3=－0.00009 512
a_4= 0.00137 237　a_5=－0.00072 085　a_6= 0.00014 476
b_0=－0.78539 816　b_1=－0.04166 397　b_2=－0.00003 954　b_3= 0.00262 573
b_4=－0.00054 125　b_5=－0.00029 333　b_6= 0.00013 558

b）第 1 種 1 次ベッセル関数

① z＜0.1　$J_1(x) \approx \frac{z}{2}$　(Hantush, 1964)

z>16　$J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right)$　(Hantush, 1964)

② x>0　$J_\nu(x) = M_\nu \cos(\theta_\nu)$
さらに，x が大きい場合（ここで，μ≡4ν^2）　M_ν，θ_ν は関数 J_0 に掲載分と同じ

③ －3≤x≤3　t≡x/3

$$\frac{1}{x} J_1(x) = a_0 + a_2 t^2 + a_4 t^4 + a_6 t^6 + a_8 t^8 + a_{10} t^{10} + a_{12} t^{12} + \varepsilon \qquad |\varepsilon|<1.3\times10^{-8}$$

ここで，a_0= 0.5　a_2=－0.56249 985　a_4= 0.21093 573　a_6=－0.03954 289
a_8= 0.00443 319　a_{10}=－0.00031 761　a_{12}= 0.00001 109

3≤x<∞　t≡3/x

$$J_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} f_1 \cos(\theta_1)$$

$$f_1(x) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 + a_6 t^6 + \varepsilon \quad |\varepsilon|<4\times10^{-8}$$

$$\theta_1(x) = x + b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5 + b_6 t^6 + \varepsilon \quad |\varepsilon|<9\times10^{-8}$$

a_0=0.79788 456　a_1= 0.00000 156　a_2=0.01659 667　a_3= 0.00017 105
a_4=－0.00249 511　a_5=0.00113 653　a_6=－0.00020 033
b_0=－2.35619 449　b_1=0.12499 612　b_2= 0.00005 650　b_3=－0.00637 879
b_4=0.00074 348　b_5=0.00079 824　b_6=－0.00029 166

c）第 2 種 0 次ベッセル関数

①

$$Y_0(z)=\frac{2}{\pi}\left\{\gamma+\log_e\left(\frac{z}{2}\right)\right\}J_0(z)+\frac{2}{\pi}\left\{\frac{(z^2/4)}{(1!)^2}-\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{(z^2/4)^2}{(2!)^2}+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{(z^2/4)^3}{(3!)^2}+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{\gamma+\log_e\left(\frac{z}{2}\right)\right\}J_0(z)+\frac{2}{\pi}\left\{\frac{(z/2)^2}{(1!)^2}-\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{(z/2)^4}{(2!)^2}+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{(z/2)^6}{(3!)^2}+\cdots\cdots\right\}$$

② $x>0$

$$Y_\nu(x)=M_\nu\sin(\theta_\nu)$$

さらに，x が大きい場合　(ここで，$\mu\equiv 4\nu^2$) $M\nu$，$\theta\nu$ は関数 J_0 に掲載分と同じ

③ $-3\le x\le 3$　$t\equiv x/3$

$$Y_0(x)=\frac{2}{\pi}\log_e\left(\frac{x}{2}\right)J_0(x)+a_0+a_2t^2+a_4t^4+a_6t^6+a_8t^8+a_{10}t^{10}+a_{12}t^{12}+\varepsilon\qquad |\varepsilon|<1.4\times10^{-8}$$

ここで，a_0= 0.36746 691　a_2=　0.60559 366　a_4=－0.74350 384　a_6=　0.25300 117

a_8=－0.04261 214　a_{10}=　0.00427 916　a_{12}=－0.00024 846

$3\le x<\infty$　$t\equiv 3/x$

$$Y_0(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}f_0\sin(\theta_0)$$　ここで，f_0 および θ_0 は関数 J_0 での定義と同じ

<u>d) 第 2 種 1 次ベッセル関数</u>

① $x>0$

$$Y_\nu(x)=M_\nu\sin(\theta_\nu)$$

さらに，x が大きい場合（ここで，$\mu\equiv 4\nu^2$）M_ν，θ_ν は関数 J_0 に掲載分と同じ

② $-3\le x\le 3$　$t\equiv x/3$

$$xY_1(x)=\frac{2x}{\pi}\log_e\left(\frac{x}{2}\right)J_1(x)+a_0+a_2t^2+a_4t^4+a_6t^6+a_8t^8+a_{10}t^{10}+a_{12}t^{12}+\varepsilon\qquad |\varepsilon|<1.1\times10^{-7}$$

ここで，a_0=－0.63661 98　a_2= 0.22120 91　a_4=　2.16827 09　a_6=－1.31648 27

a_8=0.31239 51　a_{10}=－0.04009 76　a_{12}=　0.00278 73

$3\le x<\infty$　$t\equiv 3/x$

$$Y_1(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}f_1\sin(\theta_1)$$　ここで，f_1 および θ_1 は関数 J_1 での定義と同じ

これらの関数を使うシーンはいくつかあるが，筆者の経験では数値的逆 Laplace 変換技法を用いた場合の，第二種変形ベッセル関数を用いた場合に，Laplace 場での水位低下量関数値が 0 除などで無限大をとることもあり，計算機のもつ有効範囲を超え，計算が滞るケースである。特に，比較的早い時間における井戸貯留問題，定圧揚水問題，有限側方境界問題の場合である。このようにまとめてみると，無限小口径井定流量無限遠方境界である Theis 式以外は皆何らかの対策を必要とする。また，Cooper らのスラグ試験結果の解析式は，有限径井戸の井戸貯留問題の類であり，これも同様に早い時間での収束性が悪い。関連する項にここで示した近似式の活用を示しておく。

【参考文献】

1） Abramowitz, M. & I.A. Stegun：Handbook of mathematical functions, Dover Publications, Inc., p.1040, 1972.

2） Hantush, M.S.: Hydraulics of wells, Advances in Hydroscience, Vol.1, ed.by V.T.Chow, pp.281-432, 1964.

3） 進士 喜英，菱谷智幸，今井紀和：井戸理論の数値化に関する一考察－Theis 式の近似化－，日本地下水学会春季講演会予稿集，pp.98-101, 2016.

【付録】Bessel 関数

第一種および第二種ν次ベッセル関数 Jv, Yv は以下の方程式の解である。

$$z^2 \frac{d^2\omega}{dz^2} + z\frac{d\omega}{dz} + \left(z^2 - \nu^2\right)\omega = 0$$

修正第一種および修正第二種ν次ベッセル関数 Iv, Kv は以下の方程式の解である。

$$z^2 \frac{d^2\omega}{dz^2} + z\frac{d\omega}{dz} - \left(z^2 + \nu^2\right)\omega = 0$$