

診断プロットを活用した原位置透水試験の解析方法

1. はじめに

原位置透水試験は多くの方法に分類することができるが、そのうち揚水試験やスラグ試験等は地盤工学会で標準化されており（地盤工学会, 2004）、既に完成した技術とみなされることもある。しかし、不均質な帯水層を対象とした試験方法や透水試験以外の情報を併用した解析方法など、現在でも研究や技術開発が進められている（例えば, Renard, 2005）。

このうち、1980年代後半から1990年代にかけては、計測技術とコンピュータの発達を背景として、従来の直線勾配法や曲線一致法（タイプカーブマッチング）から、コンピュータを用いた非線形最小二乗法による解析方法が利用されるようになってきた。また、帯水層モデルについても、Theis(1935)の被圧帯水層モデルだけではなく、漏水性帯水層モデルなど様々なモデルが利用されるようになってくるとともに、透水試験で得られたデータから帯水層モデルを推定する技術が発達してきた。これらの技術は、石油分野ではHorne(1995)やBourdet(2002)によって書籍にまとめられ一般的に利用されている。石油分野以外でも、地層処分研究などでもこの考え方に基づいて水理試験が行われるようになってきている（竹内ほか, 2007）。石油分野の文献は、理論式の導出についての記載が少なかったり、独特の単位系が用いられたりしているため、地下水学の技術者が体系的に理解することは容易ではない。そこで、本稿では、非線形最小二乗法を利用した水理特性の評価技術とその前提となる帯水層モデルの推定技術について概説する。

2. 非線形最小二乗法を用いた透水試験の解析方法

地盤工学会(2004)では、揚水試験の解析法としてTheis(1935)の被圧帯水層モデルの解析解に基づく曲線一致法（タイプカーブマッチング）と直線勾配法が標準化されている。これらの方法はこれまで広く活用されてきたが、最近では、試験中の流量および水位あるいは圧力のデータ取得がデジタル化され、短い時間間隔で計測された膨大なデータを現場のコンピュータで解析することも可能となっている。これに伴って、タイプカーブマッチングのように技術者によって得られる値が異なる解析方法ではなく、コンピュータを利用した客観的かつ迅速な方法が採用されるようになってきている。

本節では、このようなコンピュータを利用した方法として、非線形最小二乗法とその周辺技術について述べる。従来の直線勾配法や曲線一致法では、揚水流量が一定であることが解析の前提条件として重要であったが、非線形最小二乗法では解析解を重ね合わせることによって揚水流量が変化する条件に対しても比較的簡単に対応することができる。また、タイプカーブ法であれば、帯水層モデルごとに異なるタイプカーブを用意する必要があったが、非線形最小二乗法では解析解の計算に数値ラプラス逆変換を用いることによって、比較的簡単に複数の帯水層モデルに対して柔軟に対応することができる。

2.1 非線形最小二乗法

最小二乗法とは、式(2.1-1)で定義される残差二乗和を最小にする未知パラメータ p を求める方法である。

$$E(p) = \sum_{i=1}^n [h(p; r_i, t_i) - \hat{h}(r_i, t_i)]^2 \quad (2.1-1)$$

ここに、 $h(p; r_i, t_i)$ が観測値、 $\hat{h}(r_i, t_i)$ が理論値である。また、 $E(p)$ のことを目的関数と呼ぶ。透水試験の場合には、式(2.1-1)の代わりに式(2.1-2)を用いることも多い。式(2.1-2)は、 $\log_{10} h$ で描いたグラフ上でタイプカーブマッチングを行うことに対応する。

$$E_l(p) = \sum_{i=1}^n [\log_{10} h(p; r_i, t_i) - \log_{10} \hat{h}(r_i, t_i)]^2 \quad (2.2-2)$$

例えば、未知パラメータを透水量係数 T と貯留係数 S とした場合の残差二乗和（目的関数）分布の例を

図-1 に示す。この場合、目的関数が最小となる点が 1 点に定まるため、透水量係数と貯留係数の 2 つのパラメータを適切に決定することができる。このような最適化法は Search Method と呼ばれる方法であり、未知パラメータを変更しながら式(2.1-1)の右辺を計算して、残差二乗和分布を求める方法である。未知パラメータが多い場合には、この方法は非効率であるため、Levenberg-Marquardt 法などが使われる。これらについては、中川・小柳(1982), Press et al.(1992), Sun(1994)などを参照されたい。

ところで、図-1 の場合には、2 つの未知パラメータを決定することができたが、図-1 のような図を描いたときに目的関数が小さい領域が広く分布し、最小となる 1 点が明瞭に定まらない場合には未知パラメータを一意に決定することが難しい。一般に逆解析では、未知パラメータの数が多いほど、感度の小さいパラメータが感度の大きいパラメータに隠れたり、2 つの未知パラメータの相関性が高かったりして、最適解を一意に決定することが困難となる。このような場合には、3.3 で述べる感度分析や、図-1 に示したように未知パラメータの幅広い範囲に対して残差二乗和のマップを描く方法などが有効である。

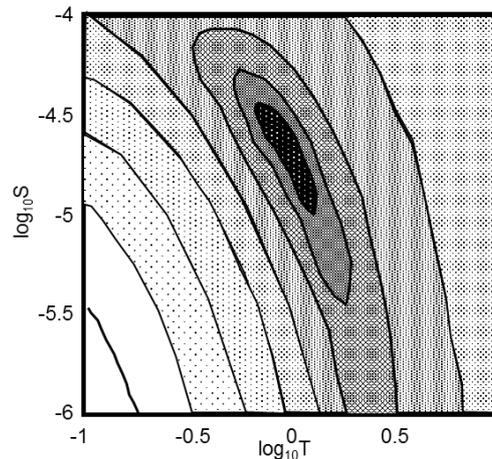


図-1 透水量係数(T)と貯留係数(S)を変化させたときの残差二乗和分布の例

2.2 帯水層モデルと数値ラプラス逆変換

帯水層モデルとは、帯水層の概念モデルと解析解導出の前提となっている数学的条件である。井戸貯留や部分貫入など帯水層だけではなく、試験区間の形状なども考慮する場合もある。有名な Theis の被圧帯水層モデルの他に、漏水性帯水層モデル、二重間隙帯水層モデルなど数多くのモデルが提案されている (Kruseman and Riddeer, 1990, Batu, 1998 など)。多くの帯水層モデルでは、支配方程式と初期・境界条件をラプラス変換して得られたラプラス領域の解析解を、解析的にラプラス逆変換することによって時間領域の解析解、すなわち経過時間 t と水頭変化量 h の関係を得ることができる。

例えば、Papadopoulos and Cooper(1967)は、井戸貯留を考慮した被圧帯水層モデルにおいて、式(2.2-1)で表されるラプラス領域の解析解を導いた後に、これを解析的にラプラス逆変換して、時間領域の解である式(2.2-2)を得ている。

$$\bar{h} = \frac{Q}{4\pi T} \frac{4K_0(\sqrt{pS/Tr})}{p \left[2\sqrt{pS/Tr} K_1(\sqrt{pS/Tr}) + \frac{pr_c^2}{T} K_0(\sqrt{pS/Tr}) \right]} \quad (2.2-1)$$

$$h = \frac{Q}{4\pi T} \frac{8\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{\left[1 - \exp\left(-\frac{\xi^2}{4u_w}\right) \right] \left\{ J_0\left(\frac{r}{r_w}\xi\right) \left[\xi Y_0(\xi) - 2\alpha Y_1(\xi) \right] - Y_0\left(\frac{r}{r_w}\xi\right) \left[\xi J_0(\xi) - 2\alpha J_1(\xi) \right] \right\}}{\left\{ \xi^2 \left[\xi J_0(\xi) - 2\alpha J_1(\xi) \right]^2 + \left[\xi Y_0(\xi) - 2\alpha Y_1(\xi) \right]^2 \right\}} d\xi \quad (2.2-2)$$

ここに、 $u_w = \frac{r_w^2 S}{4Tt}$ 、 $\alpha = \frac{r_w^2}{r_c^2} S$ である。

ラプラス逆変換を解析的に行うと、式(2.2-2)に見られるように、複雑な積分形が現れることが多く、理論値を得るためには時間のかかる数値積分の計算が必要である。これに対して、ラプラス逆変換を数值的に行うアルゴリズムが提案されて以降は、式(2.2-2)の時間領域の解析解を利用するよりは、式(2.2-1)のラプラス領域の解析解を数值的に逆変換する方が簡単かつ迅速に理論値を計算できる場合が多くなった。透水試験結果を解析する場合でも、帯水層モデルを変更すると、時間領域では解析解ごとに数値積分法を工夫する必要があったが、数値ラプラス変換ではラプラス領域の解析解を変更するだけで良いため、大幅に効率が向上した。

数値ラプラス逆変換のアルゴリズムは、Stehfest(1970)やTalbot(1979)を参照されたい。また、Stehfestのアルゴリズムについては、Lee(1999)やCheng(2000)の解説が参考になる。IMSLとして知られる数値計算用のライブラリーを使用することもできる。

2.3 単孔式透水試験と孔間透水試験

孔間透水試験（圧力干渉試験，揚水試験）では，試験区間を原点としたときの観測区間の座標を解析解に与えることによって観測区間の水頭変化を計算することができる。これに対して，単孔式透水試験では，試験区間の壁面を観測区間とみなすことによって同じ解析解を用いて試験区間の水頭変化を計算することができる。例えば，Papadopulos-Cooper の解析解を単孔式透水試験に適用するためには，式(2.2-1)および式(2.2-2)に $r = r_w$ を与えれば良い。

$$\bar{h} = \frac{Q}{4\pi T} \frac{4K_0(\sqrt{pS/Tr_w})}{p \left[2\sqrt{pS/Tr_w} K_1(\sqrt{pS/Tr_w}) + \frac{pr_c^2}{T} K_0(\sqrt{pS/Tr_w}) \right]} \quad (2.3-1)$$

$$h = \frac{Q}{4\pi T} F(u_w, \alpha) \quad (2.3-2)$$

$$= \frac{Q}{4\pi T} \frac{32\alpha^2}{\pi^2} \int_0^\infty \left[1 - \exp\left(\frac{-\xi^2}{4u_w}\right) \right] \cdot \left\{ \xi^3 [J_0(\xi) - 2\alpha J_1(\xi)]^2 + [\xi Y_0(\xi) - 2\alpha Y_1(\xi)]^2 \right\}^{-1} d\xi$$

ここに， r_w は試験区間の半径である。これらの式によって計算される理論値と試験区間で測定した実測値から，式(2.1-1)あるいは式(2.1-2)によって未知パラメータを求めることができる。ただし，解析解の導出過程において， $r \gg r_w$ のような仮定が課せられている場合は注意が必要である。ラプラス領域におけるTheisの解析解は式(2.3-3)のように表されることが一般的であるが，単孔式透水試験に適用する場合には， $r_w \rightarrow 0$ なる仮定を課す前の式(2.3-4)に $r = r_w$ を与える必要がある。

$$\bar{h} = \frac{Q}{4\pi T} \frac{2}{p} K_0(\sqrt{pS/Tr}) \quad (2.3-3)$$

$$\bar{h} = \frac{Q}{4\pi T} \frac{2}{p} \frac{K_0(\sqrt{pS/Tr})}{\sqrt{pS/Tr_w} K_1(\sqrt{pS/Tr_w})} \quad (2.3-4)$$

また，単孔式透水試験と孔間透水試験では，同じ解析解を用いる場合でも影響範囲や感度などが大きく異なるため，逆解析で得られる未知パラメータを無条件に等価とみなすことはできない。現実の帯水層は多少なりとも不均質であり，単孔式透水試験と孔間透水試験を統一的に扱うことができるというのは，解析解上での取り扱いということに注意が必要である。

2.4 流量が変化する試験

解析解の多くは流量 Q が一定の条件で導かれている。しかし，実際の試験では，必ずしも一定流量を維

持できない場合がある。あるいは、揚水終了後の水頭の回復する過程を解析対象とする回復試験も流量が変化する試験とみなすことができる。このような流量が時間変化する試験では、流量一定条件の解析解を重ね合わせることによって理論値（水頭変化）を計算することができる。

流量を図-2 に示すようにステップ状に変化させた場合の水頭変化は次のように表される。

$$h(t) = \sum_{i=1}^n (Q_i - Q_{i-1}) f(t - t_{i-1}) \tag{2.4-1}$$

ここに、 $f(t)$ は対象とする帯水層モデルにおける解析解である。例えば、Theis の解析解では

$$f(t) = \frac{Q}{4\pi T} W\left(\frac{r^2 S}{4Tt}\right)$$

であるため、式(2.4-1)は次のようなる。

$$h(t) = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i - Q_{i-1}}{4\pi T} W\left(\frac{r^2 S}{4T(t - t_{i-1})}\right) \tag{2.4-2}$$

ここに、 $W(x)$ は Theis の井戸関数であり、 $W(x) = \int_x^{\infty} (\exp(-x)/x) dx$ である。

回復試験（石油分野では Buildup 試験）では、流量 Q の揚水が継続しているときの水頭変化 $h_Q(t_p + \Delta t)$ と揚水停止時 $t = t_p$ から流量 $-Q$ で揚水を開始したときの水頭変化 $h_{-Q}(\Delta t)$ を図-3 のように重ね合わせることで、理論値 $h(t_p + \Delta t)$ を計算することができる。式(2.4-2)を適用すると、次のようなる。

$$h(t_p + \Delta t) = \frac{Q}{4\pi T} W\left(\frac{r^2 S}{4T(t_p + \Delta t)}\right) - \frac{Q}{4\pi T} W\left(\frac{r^2 S}{4T\Delta t}\right) \tag{2.4-3}$$

なお、揚水試験から回復試験への移行時に、試験区間近傍に設けたバルブで試験区間を閉鎖（シャットイン）する場合には、解析解の中に含まれる井戸貯留に関するパラメータを揚水過程と回復過程とでは変更する必要がある。この他にも、流量が変化する試験については進士(2008)が詳細に論じているので参照されたい。なお、解析解の重ね合わせは被圧帯水層における支配方程式のような線形方程式に対してのみ適用可能であり、支配方程式が非線形である不圧帯水層に対しては適用できない (Bear, 1979 など)。また、解析解の重ね合わせは、時間だけではなく空間においても可能であるため、試験孔周辺に不透水境界あるいは定水頭境界があるときの水頭変化も同様の考え方で求めることができる。詳しくは、Domenico and Schwartz(1990, p.120-122)などを参照されたい。

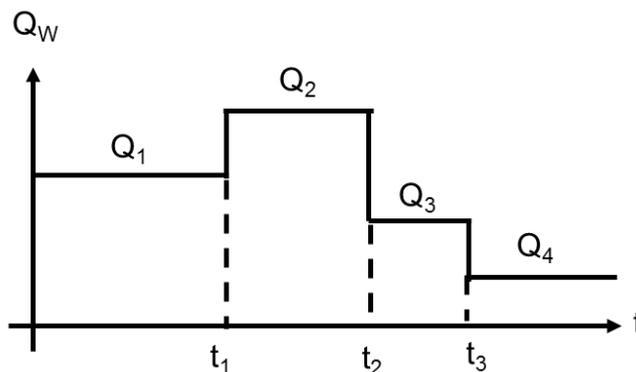


図-2 流量をステップ状に変化させる場合

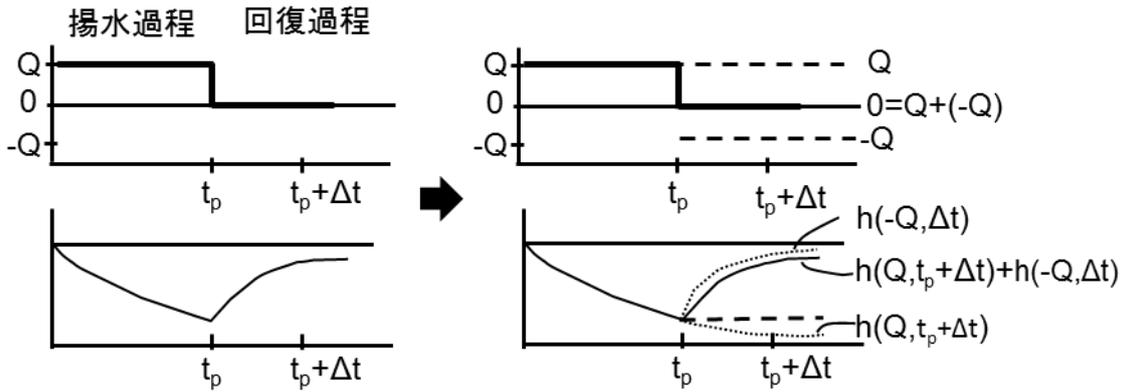


図-3 回復試験における水頭変化の流量変化の重ね合わせによる計算

3. 帯水層モデルの推定

単孔式透水試験や揚水試験の解析方法として、地盤工学会(2004)を含む多くの文献では、主として Theis の被圧帯水層モデルに基づく解析方法が示されている。したがって、試験対象の帯水層が Theis の解析解の条件に適合するか否かを判断することなく、透水係数や比貯留係数が求められることがある。しかし、現実の帯水層が解析解の条件に適合しない場合には、現実とは異なる帯水層モデルに実測値を無理に適合させるため、適切でない透水量係数や貯留係数が得られる恐れがある。そのため、透水試験の解析では、それまでに得られている地質・地盤情報に適合した帯水層モデルを選定することが重要であり、地盤工学会(2004)でもそのように記述されている。

これに対して、地質・地盤情報に加えて、透水試験のデータからも帯水層モデルを推定しようという試みがある。このような考え方は、必ずしも新しいものではないが、Bourdet(1983)によって提案された圧力の時間微分の形状が、帯水層モデルによって大きく異なることが認識されるようになって、広く利用されるようになった (Renard, 2009)。本節では、この微分プロットとその周辺技術について紹介する。なお、微分プロットを用いた帯水層モデルの推定の具体例については、Renard et al.(2009)を参照されたい。

3.1 水頭変化の時間微分と診断プロット

Bourdet(1983)が導入した圧力 p の時間微分は、 $\partial p / \partial(\ln t)$ で定義されている。水の密度を一定と仮定すると、圧力を水頭 h に置き換えて $\partial h / \partial(\ln t)$ として、合成関数の微分規則を用いて次のように表すことができる。

$$\frac{\partial h}{\partial(\ln t)} = t \frac{\partial h}{\partial t} \tag{3.1-1}$$

実測値あるいは理論値から $\partial h / \partial(\ln t)$ を求めるには、ある経過時間 t_i における水頭変化 h_i に対して、その前後の経過時間 t_{i-1} , t_{i+1} と水頭変化 h_{i-1} , h_{i+1} から式(3.1-2)に従って計算する。

$$\frac{dh}{d(\ln t)} \cong \frac{\left(\frac{h_i - h_{i-1}}{\ln t_i - \ln t_{i-1}} \right) (\ln t_{i+1} - \ln t_i) + \left(\frac{h_{i+1} - h_i}{\ln t_{i+1} - \ln t_i} \right) (\ln t_i - \ln t_{i-1})}{\ln t_{i+1} - \ln t_{i-1}} \tag{3.1-2}$$

実測値について計算する場合には、経過時間とともに分母の $\ln t_i - \ln t_{i-1}$ が小さくなるため $\partial h / \partial(\ln t)$ のばらつきが大きくなる。このため、微分をすぐ前後の実測値から計算するのではなく、図-4 に示すように対数の時間間隔 L 離れた実測値を用いて計算する方法などが提案されている。詳細は Bourdet et al.(1989), Spang and Wurster(1993), Horne(1995)などを参照されたい。

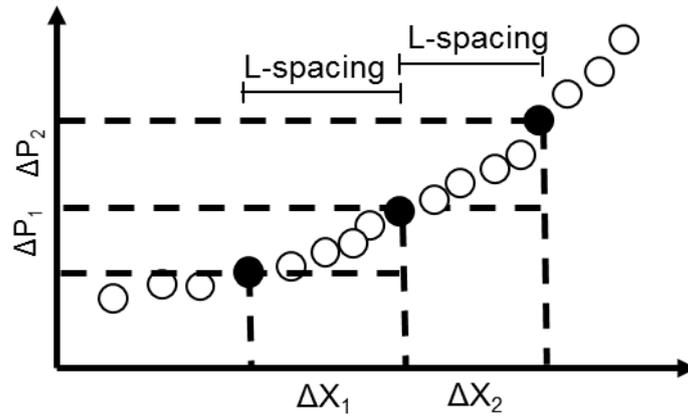


図-4 時間間隔 L 離れた実測値を用いた時間微分 $\partial h/\partial(\ln t)$ の計算方法

Boudet(1983)は、実測値あるいは理論値に基づいて計算した圧力の時間微分を圧力とともに、両対数紙上にプロットした図を診断プロット(diagnostic plot)と名付けた。圧力ではなく水頭で表示する場合も同様である。実測値の診断プロットの例を図-5に示す。式(2.3-1)に基づいてパラメータ α を変化させながら描いた理論値の診断プロットを図-6に示し、両図を重ね合わせて図-7に示す。これらの図から、水頭のプロットだけの場合よりも、水頭の時間微分プロットを合わせて実測値と理論値を比較することによって、パラメータ α の推定が容易になることがわかる。

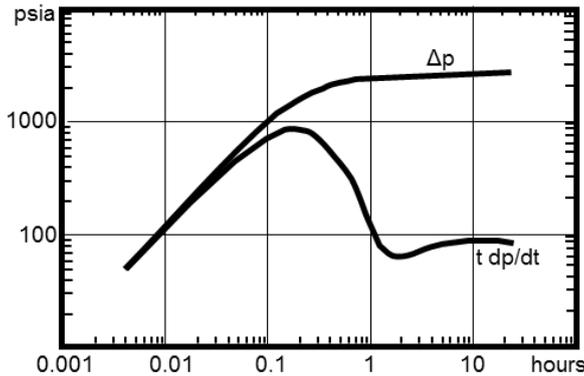


図-5 実測値に基づく診断プロットの例 (Horne, 1995 から引用)

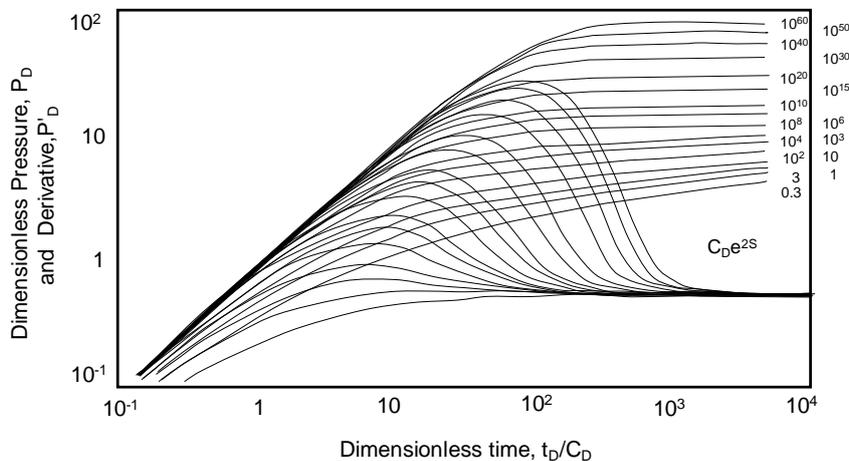


図-6 井戸貯留を考慮した帯水層モデルに基づく解析解の診断プロット

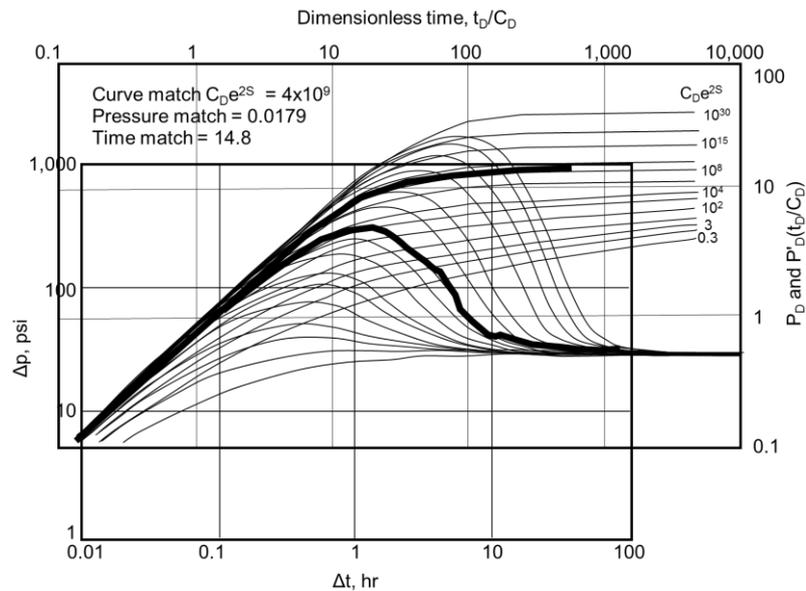


図-7 水頭変化とその時間微分を用いたパラメータの推定 (図-5 と図-6 の重ね合わせ)

3.2 診断プロットに基づく帯水層モデルの推定

診断プロットを様々な帯水層モデルにおける解析解に対して計算すると図-8 に示すように帯水層モデルごとに特徴的な挙動を示すことが知られている。したがって、同図のような診断プロットの特徴を整理したカタログが手元があれば、現場で得られた観測値から式(3.1-2)に従って $\partial h / \partial(\ln t)$ を計算して、診断プロットを作成することによって帯水層モデルを推定することができる。診断プロットの特徴については、Horne(1995), Bourdet(2002), Renard et al.(2009)などを参照されたい。

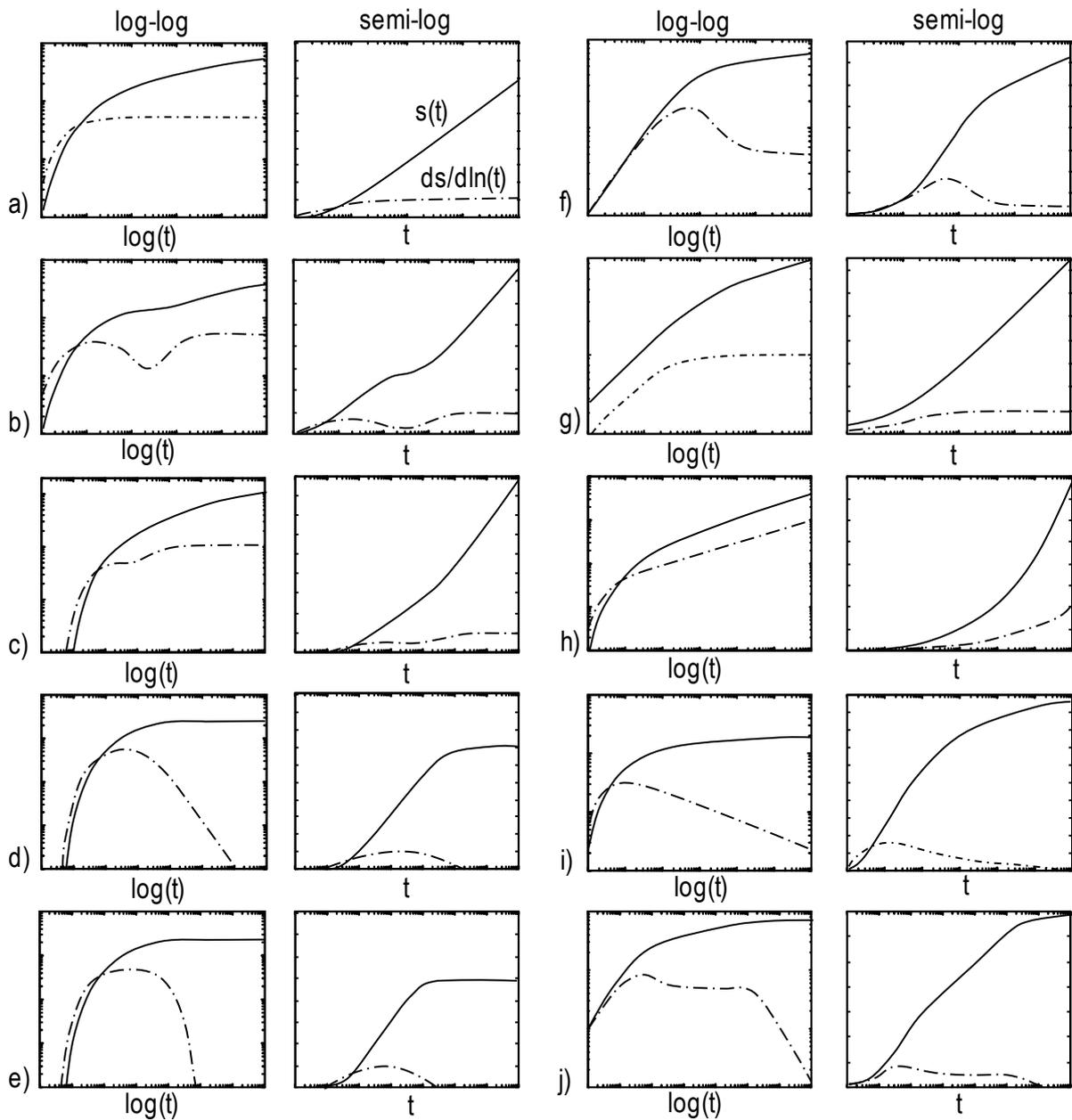


図-8 代表的な帯水層モデルと診断プロットの特徴 (Renard et al., 2009 から引用)

- a) 被圧帯水層モデル
- b) 二重間隙帯水層モデル/不圧帯水層モデル
- c) 不透水境界が存在する被圧帯水層モデル
- d) 定水頭境界が存在する被圧帯水層モデル
- e) 漏水性帯水層モデル
- f) 井戸貯留とスキン効果を考慮した被圧帯水層モデル
- g) 鉛直亀裂モデル
- h) 流れの次元が2よりも小さい帯水層モデル
- i) 流れの次元が2よりも大きい帯水層モデル
- j) 定水頭境界が存在する帯水層モデルと井戸貯留の複合影響

3.3 診断プロットに基づく感度の評価

実際の透水試験結果から、帯水層の未知パラメータを解析するにあたって、揚水初期のデータを解析対象とすべきか、揚水から十分に時間が経過した後のデータを解析対象とすべきかという問題を考える。本項では、式(2.3-1)に示した井戸貯留を考慮した被圧帯水層モデルを想定して、診断プロットの意義と感度分析の方法を概説する。

図-6 に示したように、式(2.3-1)に基づいてパラメータ α を変化させながら描いた水頭変化の時間微分 $\partial h/\partial(\ln t)$ は、揚水初期には水頭変化の時間微分は傾き 1 の直線に従って増大する一方、十分に時間が経過するとパラメータ α によらず $\partial h/\partial(\ln t)$ の値は 0.5 に収斂することが特徴である。

揚水初期には、井戸貯留のため、揚水流量 Q は揚水孔の水位低下によって供給されるので、水位低下と揚水流量の関係は以下のように表される。

$$h = \frac{Q}{\pi r_c^2} t \quad (3.3-1)$$

これを式(3.1-1)に与えると次のようになるため、水頭の時間微分の傾きは 1 になる。

$$\frac{\partial h}{\partial(\ln t)} = t \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{Q}{\pi r_c^2} t = h \quad (3.3-2)$$

揚水後期の水頭低下量は、Cooper and Jacob(1946)の近似式として次のように表される。

$$h = \frac{Q}{4\pi T} \ln\left(\frac{2.25Tt}{r^2 S}\right) \quad (3.3-3)$$

これを式(3.1-1)に与えると次のようになる。

$$\frac{\partial h}{\partial(\ln t)} = t \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{Q}{4\pi T} \quad (3.3-4)$$

すなわち、時間微分 $\partial h/\partial(\ln t)$ は経過時間 t に依存しないため、傾きが一定となる。この定数から式(3.3-4)を用いて透水量係数 T を求めることができる。また、透水量係数 T と貯留係数 S を未知パラメータとすると、それが水頭変化に及ぼす感度係数は $\partial h/\partial T$ と $\partial h/\partial S$ で与えられる。

これらのことを知識として知っていれば、微分プロットの傾きが 1 に近い時間領域は井戸貯留の影響が卓越するので帯水層の水理特性の評価には適切でないこと、微分プロットが一定の傾きになった以降は透水量係数が一意に、つまり貯留係数の影響を受けることなく決定できること、その中間の時間帯は透水量係数と貯留係数の両方の影響を受けているので、そこから貯留係数が決定できることがわかる。また、試験中に現場の技術者がこの知識を知っていれば、適切なタイミングで試験を終えることができる。

【記号】

- $J_0(x)$ 0 次第 1 種ベッセル関数
- $J_1(x)$ 1 次第 1 種ベッセル関数
- $Y_0(x)$ 0 次第 2 種ベッセル関数
- $Y_1(x)$ 1 次第 2 種ベッセル関数
- $K_0(x)$ 0 次第 2 種変形ベッセル関数
- $K_1(x)$ 1 次第 2 種変形ベッセル関数

【参考文献】

- 1) 地盤工学会：地盤調査の方法と解説，2004.
- 2) 竹内真司・中野勝志・平田洋一・進士喜英・西垣誠：深層岩盤を対象としたシーケンシャル水理試験手法の開発と適用，地下水学会誌，Vol.49，No.1，pp.17-32，2007.
- 3) 中川徹・小柳義夫：最小二乗法による実験データ解析，東京大学出版会，1982.
- 4) 進士喜英：現場透水試験結果の解釈と活用に関する基礎的研究，岡山大学大学院環境学研究科博士論文，2008.
- 5) 日本地下水学会企画委員会揚水試験研究グループ：揚水試験に関する技術講習会テキスト，2000.
- 6) Agarwal, R.G. : A new method to account for producing time effects when drawdown type curves are used to analyze pressure buildup and other test data, Paper presented at the 55th Annual Fall Technical Conference and Exhibition of the Society of Petroleum Engineers of AIME, Dallas, TX, pp.21-24 September 1980.
- 7) Batu, V. : *Aquifer Hydraulics A Comprehensive Guide to Hydrogeologic Data Analysis*, Wiley-Interscience, New York, 1998.
- 8) Birsoy, Y.K., and Summers, W. K. : Determination of aquifer parameters from step tests and intermittent pumping data, *Ground Water*, Vol.18, No.2, pp.137-146, 1980.
- 9) Bourdet, D., Whittle, T.M., Douglas, A.A. and Pirard, Y.M. : A new set of type curves simplifies well test analysis, *World Oil*, No.196, pp.95-106, 1983.
- 10) Bourdet, D., Ayoub, J.A., and Pirard, Y.M. : Use of pressure derivative in well-test interpretation, *SPE Formation Evaluation*, pp.293-302, 1989.
- 11) Bourdet, D. : *Well Test Analysis: The Use of Advance Interpretation Models*, Elsevier, Amsterdam, 2002.
- 12) Cheng, A. H.-D. : *Multilayered Aquifer Systems*, Marcel Dekker, 2000.
- 13) Cooper, H.H.J., and Jacob C.E. : A generalized graphical method for evaluating formation constants from pumping test data, *Trans. Am. Geophys. Union*, Vol.27, pp.526-534.
- 14) Domenico, P.A., and Schwartz, F.W. : *Physical and Chemical Hydrogeology*, Wiley.
- 15) Horne, R.N. : *Modern Well Test Analysis A Computer-Aided Approach*, Petroway. 1995.
- 16) Kruseman, G.P., and Ridder, N.A. : *Analysis and evaluation of pumping test data, the 2nd ed.*, ILRI publication 47, 375p., 1990.
- 17) Papadopoulos, I.S., and Cooper, H.H. : Drawdown in a well of large diameter, *Water Resources Research*, Vol.3, pp.241-244, 1967.
- 18) Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. and Flannery, B.P. : *Numerical Recipes in Fortran 2nd ed.*, Cambridge Univ. Press, 1992.
- 19) Renard, P. : The future of hydraulic tests, *Hydrogeology Journal*, Vol.13, No.1, pp.259-262, 2005.
- 20) Renard, P., Glenz, D. and Mejias, M. : Understanding diagnostic plots for well-test interpretation, *Hydrogeology Journal*, Vol.17, pp.589-600, 2009.
- 21) Spane Jr. F.A., Wurstner, S. K. : DERIV: A computer program for calculating pressure derivatives for use in hydraulic test analysis, *Ground Water*, Vol.31, No.5, pp.814-822, 1993.
- 22) Stehfest, H. : Numerical inversion of Laplace transforms, *Commun. ACM*, Vol.13, No.1, pp.47-49, 1970.
- 23) Sun, N.-Z. : *Inverse Problems in Groundwater Modeling*, Kluwer, 1994.
- 24) Talbot, A. : The accurate numerical inversion of Laplace transforms, *J. Inst. Math. Appl.*, Vol.23, pp.97-120, 1979.
- 25) Theis, C.V. : The relation between the lowering of the piezometric surface and the rate and duration of discharge of a well using groundwater storage, *Trans. Am. Geophys. Union*, Vol.16, pp.519-524, 1935.