

非漏水性二次元放射状定常流(Dupuit)の式

一般に Thiem 式と称されているが (例えば, 土木学会水理公式集¹⁾, 赤井²⁾では Dupuit(1863)の誘導した式とし, Thiem(1906)名は揚水試験結果の解析法として同書に紹介されている。多くの地下水技術者も, 当該式を Thiem 式と称することが少なくないが, 式は Dupuit の式と称し, 揚水試験結果の整理方法を Thiem の方法と称するべきであろう。

(注: Thiem であって Theim ではない, また, Theis であって Thies ではない)。

本解説では, 以下の内容に言及する。

- 1) 帯水層条件の整理
- 2) 定常式の誘導(その1)
- 3) 定常式の誘導(その2)
- 4) 定常式の誘導(その3)
- 5) 不圧帯水層の式

(1) 帯水層条件

- 水平で一定層厚(b), 透水等方性(K)
- 揚水井戸を中心して半径 R の円周上に水位低下量 $s=0$ の境界条件
- 帯水層上下層からの漏水供給や逸水はない
- 降雨などの供給はない
- 揚水井戸は帯水層を完全に貫入

以下, 赤井²⁾を参考に示す。

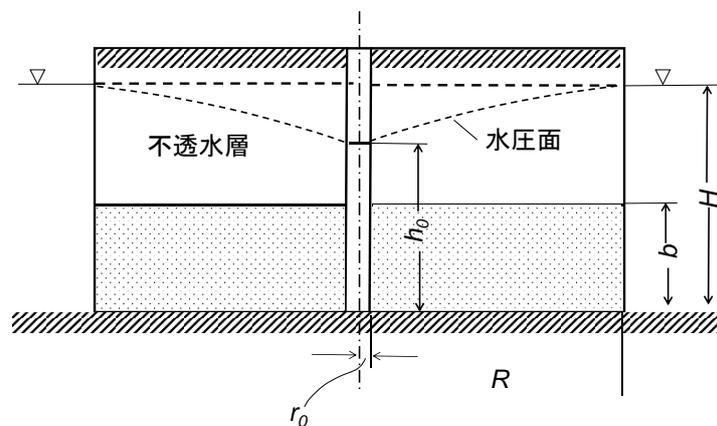


図-1 被圧地下水の掘抜井戸

(2) 定常式の誘導

1) 定常式の誘導 (その1)

ここで示す誘導は赤井²⁾を主に参考にしている。ここでは, 「被圧地下水の掘抜井戸」として以下を説明している。揚水井戸からの半径距離 r の円周上のフラックス q は Darcy 則から以下となる。

$$q = K \frac{dh}{dr} \quad (1.1)$$

(1.1)式を全円周上および深さ方向に積分すると, 帯水層内を通過する流量 Q となる。

$$Q = 2\pi r q b = 2\pi b K r \frac{dh}{dr} \quad (1.2)$$

帯水層条件から以下の境界条件(B.C.)の標記とする。

$$h=H \quad \text{at} \quad r=R \quad (1.3)$$

(1.2)式的一般解は以下のように誘導できる。

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi b K r \frac{dh}{dr} \\ \frac{1}{r} &= \frac{2\pi b K}{Q} \frac{dh}{dr} \\ \frac{1}{r} dr &= \frac{2\pi b K}{Q} dh \end{aligned} \quad (1.4)$$

(1.4)式を積分すると以下の一般解を得る。

$$\log_e(r) = \frac{2\pi b K}{Q} h + C \quad (1.5)$$

ここで、C は積分定数。

境界条件を代入し C を決める。B.C.(1.3)式を代入すると以下となる。

$$C = \log_e(r) - \frac{2\pi b K}{Q} h = \log_e(R) - \frac{2\pi b K}{Q} H$$

よって、(1.5)式は以下となる。

$$\begin{aligned} \log_e(r) &= \frac{2\pi b K}{Q} h + \log_e(R) - \frac{2\pi b K}{Q} H \\ \frac{2\pi b K}{Q} (H - h) &= -\{\log_e(r) - \log_e(R)\} = -\log_e\left(\frac{r}{R}\right) \\ &= \log_e\left(\frac{R}{r}\right) \end{aligned}$$

よって、以下となる。

$$Q = \frac{2\pi b K}{\log_e\left(\frac{R}{r}\right)} (H - h) \quad (1.6)$$

ここで、水位低下量 s を導入すると以下となる。

$$s = H - h \quad (1.7)$$

$$Q = \frac{2\pi b K s}{\log_e\left(\frac{R}{r}\right)} \quad (1.8)$$

また、任意の2地点 $r=r_1, r_2$ において、 $h=h_1, h_2$ (あるいは s_1, s_2) となった場合、(1.6)式から以下の関係が得られる。

$$Q = \frac{2\pi b K}{\log_e\left(\frac{R}{r_1}\right)} (H - h_1) = \frac{2\pi b K}{\log_e\left(\frac{R}{r_2}\right)} (H - h_2) = \frac{2\pi b K}{\log_e\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} (h_2 - h_1)$$

これより、Qなどを消去すると、以下となる。

$$\begin{aligned} \frac{(H - h_1)}{\log_e\left(\frac{R}{r_1}\right)} &= \frac{(H - h_2)}{\log_e\left(\frac{R}{r_2}\right)} = \frac{(h_2 - h_1)}{\log_e\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \\ \frac{(s_1)}{\log_e\left(\frac{R}{r_1}\right)} &= \frac{(s_2)}{\log_e\left(\frac{R}{r_2}\right)} = \frac{(s_1 - s_2)}{\log_e\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \end{aligned} \quad (1.9)$$

2) 定常式の誘導 (その 2)

一定揚水流量 Q が基礎方程式の誘導過程に組み込まれており、一般的な支配方程式で見られる境界条件としての揚水流量条件が明確ではない。より一般的な説明を以下に示す。

別途資料 (資料 1-02-1) に示したように、3次元直交座標系を円筒座標系に変換した基礎方程式は以下である。

$$K_r \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{K_r}{r} \frac{\partial s}{\partial r} + K_z \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = 0 \quad (2.1)$$

なお、 x, y 軸方向は等方透水性として同じ透水係数 K_r とした。

ここでは、帯水層厚一定で、揚水井戸は完全貫入であることから、鉛直 z 方向の水位低下量 s に勾配は生じないことから、上式左辺第 3 項は 0 となる。

$$K_r \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{K_r}{r} \frac{\partial s}{\partial r} = 0$$

ここで、両辺に (r/K_r) をかけると以下となる。

$$r \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{\partial s}{\partial r} = 0 \quad (2.2)$$

さらに以下のように縮約できる。

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial s}{\partial r} \right) = 0 \quad (2.3)$$

数学的な展開で得られたものであるが、以下のような物理的な説明が出来る。

(2.3)式に、 $(2\pi b K_r)$ をかけると以下となる。

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(2\pi b r K_r \frac{\partial s}{\partial r} \right) = 0$$

上式左辺()内は、半径 r の円周上の帯水層を通過する流量 Q であり、この流量を半径距離で微分したものが 0 であるということは、揚水井戸を中心軸とする同心円周上を通過する流量は一定流量 Q 、即ち定常状態であることを意味する。従って、(2.3)式を基礎方程式として適切な境界条件を与えて解けばよいことになる。

(2.3)式の一般解は以下のように誘導できる。

まず、 r に対して 1 回積分すると以下となる。

$$\left(r \frac{ds}{dr} \right) = A$$

これを以下のように変数分離する。

$$ds = \frac{A}{r} dr$$

これを、 r で再度積分すると以下となる。

$$s = \log_e(r)A + B \quad (2.4)$$

ここで、 A, B は積分定数であり、境界条件を満たすように決定されるが、必要な上件数は 2 でよいが、以下の 3 つが用意されることが一般的である。

$$\text{B.C.(1)} : r=R \text{ で } s=0 \quad (2.5)$$

$$\text{B.C.(2)} : r=r_w \text{ (あるいは特定の距離 } r_1) \text{ で } s=s_w \text{ (あるいは } s_1) \quad (2.6)$$

$$\text{B.C.(3)} : r=r_w \text{ で揚水流量 } Q, \text{ ここで } Q \text{ は以下の定義となる。ここで、} K=K_r \text{ とした。}$$

$$Q = 2\pi b K r \left. \frac{ds}{dr} \right|_{r=r_w} \quad (2.7)$$

これらの境界条件を(2.4)式に導入するとそれぞれ以下となる。

B.C.(1)の導入

$$\log_e(R)A + B = 0 \quad (2.8)$$

B.C.(2)の導入

$$\log_e(r_w)A + B = s_w \quad (2.9.1)$$

B.C.(3)の導入

$$2\pi bKr_w \frac{1}{r_w} A = 2\pi bKA = -Q \quad (2.9.2)$$

一般に、同じ地点で異なる境界条件を設定することはできないため、B.C.(2)と(3)はいずれかの選択となる。

a) B.C.(1)と(2)の連立から、以下ようになる。

$$A = \frac{s_w}{\log_e(r_w) - \log_e(R)}, \quad B = \frac{-s_w}{\log_e(r_w) - \log_e(R)} \log_e(R)$$

よって、(2.4)式は以下となる。

$$\begin{aligned} s &= \frac{s_w}{\log_e(r_w) - \log_e(R)} \log_e(r) + \frac{-s_w}{\log_e(r_w) - \log_e(R)} \log_e(R) \\ s &= \frac{\log_e(r) - \log_e(R)}{\log_e(r_w) - \log_e(R)} s_w = \frac{\log_e(R/r)}{\log_e(R/r_w)} s_w \end{aligned} \quad (2.10)$$

b) B.C.(1)と(3)の連立から、A, B は以下ようになる。

$$A = \frac{-Q}{2\pi bK}, \quad B = \frac{Q}{2\pi bK} \log_e(R)$$

よって、(2.4)式は以下となる。

$$\begin{aligned} s &= \frac{-Q}{2\pi bK} \log_e(r) + \frac{Q}{2\pi bK} \log_e(R) = \frac{Q}{2\pi bK} \log_e(R/r) \\ Q &= \frac{2\pi bKs}{\log_e\left(\frac{R}{r}\right)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

3) 定常式の誘導 (その3)

これまでの誘導は、定常状態を前提にしているが、非定常式である Theis の井戸関数から定常式を誘導することができる。この誘導は、別資料(資料 3-07)で紹介しているので、その具体の解説はそちらを参照されたい。あくまでも非定常状態での適用になるため、純粋に定常状態ではないことから以下の条件を明示しておく。

ある時間 t (一定流量揚水開始後の経過時間) で、対象とする観測井の水位低下挙動が Theis の井戸関数に従い、さらに以下の直線勾配式に従うとする。

$$s = -\gamma - \log_e(\lambda) = -\gamma - \log_e\left(\frac{Sr^2}{4Tt}\right) \quad (3.1)$$

ここで、 γ : Euler 定数, S : 貯留係数, T : 透水量係数(= bK)である。

この条件で、観測位置 $r=r_1$ および r_2 における水位低下両 $s=s_1$ および s_2 には以下の関係が誘導できる。

$$\frac{s_1}{Q/4\pi T} = -\gamma - \log_e\left(\frac{Sr_1^2}{4Tt}\right) \quad \text{および} \quad \frac{s_2}{Q/4\pi T} = -\gamma - \log_e\left(\frac{Sr_2^2}{4Tt}\right)$$

これより、

$$\begin{aligned} \frac{s_1}{Q/4\pi T} - \frac{s_2}{Q/4\pi T} &= \log_e\left(\frac{Sr_2^2}{4Tt}\right) - \log_e\left(\frac{Sr_1^2}{4Tt}\right) = \log_e\left(\frac{r_2^2}{r_1^2}\right) \\ &= 2\log_e\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \end{aligned}$$

よって,

$$(s_1 - s_2) = \frac{Q}{2\pi T} \log_e \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \quad (3.2)$$

(3.2)式は, (1.8), (1.9)式から誘導されるものと同じものである。

さらに定常状態からの誘導では, 水位低下量 $s=0$ となる半径を影響圏半径 R としている。非定常では境界条件としての R は定義できないが, 注目している時間 t に対して, (3.2)式を満たす影響圏半径を $R(t)$ として定義する。ここで, $R(t)$ は時間によって変動する。

$s_2=0$ とし, このとき r_2 を $R(t)$ とする。この関係を(3.2)式に代入し, 任意の観測位置として添え字を消去すると以下となる。

$$s = \frac{Q}{2\pi T} \log_e \left(\frac{R(t)}{r} \right) \quad (3.3)$$

この式形は, (1.8)式と同じ関係式である。

また, $R(t)$ の定義を(3.1)に代入すると $R(t)$ は以下となる。

$$-\gamma - \log_e \left(\frac{SR(t)^2}{4Tt} \right) = 0$$

$$R(t)^2 = \exp(-\gamma) \frac{4Tt}{S}$$

$\gamma=0.57721566\dots$ であることから, $\exp(-\gamma)=0.561459\dots$

$$R(t) = \sqrt{0.561459 \cdot \frac{4Tt}{S}} = \sqrt{2.2458\dots \cdot \frac{Tt}{S}} \cong 1.5 \sqrt{\frac{Tt}{S}}$$

となり, 非定常時の影響圏半径公式が得られ, この式の誘導が上記でなされたことが分かる。

(3) 不圧帯水層の式

不圧の場合, 水面が極端に急な低下はないとすれば, 被圧の場合で論じてきたように水平方向の地下水流れのみを扱うことができ, その動水勾配は近似的に, $i \approx dh/dr$ と表すことができる。これより Darcy 流速は以下となる。

$$v = K \frac{dh}{dr}$$

よって, 半径 r の円筒周面を通過する流量 Q はこの点での飽和水位厚さが水面高さ h と同一と定義して以下となる。ここで, 流量 Q は揚水を正(+)とした。

$$Q = 2\pi K r h \frac{dh}{dr}$$

この関係式を $r=r_1$ で $h=h_1$, $r=r_2$ で $h=h_2$ の範囲で積分すると以下となる。

$$\frac{Q}{2\pi K} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = \int_{h_1}^{h_2} h dh, \quad \frac{Q}{2\pi K} \left[\log_e \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \right] = \left[\frac{h^2}{2} \right]_{h_1}^{h_2}, \quad \frac{Q}{2\pi K} \log_e \left(\frac{r_2}{r_1} \right) = \frac{h_2^2 - h_1^2}{2}$$

$$h_2^2 - h_1^2 = \frac{Q}{\pi K} \log_e \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$$

以上のように不圧帯水層の場合の定常式が誘導できた。

ここで, 以下のように展開を試みる。

$$\frac{Q}{\pi K} \log_e \left(\frac{r_2}{r_1} \right) = h_2^2 - h_1^2 = (h_2 + h_1)(h_2 - h_1)$$

$$\frac{Q}{2\pi K} \log_e \left(\frac{r_2}{r_1} \right) = \frac{(h_2 + h_1)}{2} (h_2 - h_1) = D'(h_2 - h_1)$$

さらに、 $h=H-s$ を代入する。

$$\frac{Q}{2\pi K} \log_e \left(\frac{r_2}{r_1} \right) = D'(s_1 - s_2)$$

この式は、領地点の平均水位高さ D' を被圧帯水層の層厚相当とみなすことで、上式と被圧帯水層の式との関係が明確になる。

(4) Thiem の図解法

一般に Thiem 式と称される公式が 2 種類誘導できた。この方法の適用は以下のように解説できる。

影響圏半径 R は試験結果の整理前には得られないため、任意の観測井位置 r に対する水位低下量 s の関係を考える。

$$\frac{(s_1 - s_2)}{\log_e \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} = \frac{Q}{2\pi T} \quad (1)$$

$$\frac{(s_1 - s_2)}{2.3025 \log_{10} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} = \frac{Q}{2\pi T} \quad (2)$$

試験条件および地盤条件から、 Q および T は一定値である。このため、(1) 式の水位低下量 s は観測位置の距離 r に対して線形分布を示している。定常状態あるいは非定常状態でも Theis 関数の直線近似ができる範囲であれば、試験結果はこの線形分布に乗る。

一般には、常用対数を用いる (2) 式を用いる。(2) 式から、以下が誘導できる。

$$T = \frac{Q}{2\pi} \frac{2.3025 \log_{10} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)}{(s_1 - s_2)} = \frac{2.3025 Q}{2\pi} \frac{1}{\Delta s} \quad (3)$$

ここで、 Δs は常用対数軸上の直線勾配である。

ここでは、2 点の観測点に対して説明したが、対象点が多い場合には直線部分の勾配 Δs に着目すればよい

(5) 考察

定常井戸式というとき影響圏半径 R がつきものであるが、この定義が結構難しい。いくつかの影響圏半径の定義と算定式を進士⁴⁾がまとめている。これによれば、Thiem 法で得られる影響圏半径は、実際の水位低下量 $s=0$ ではなく、揚水井戸周辺の水位低下量を予測するための定義であると考えべきである。揚水流量と地盤内や降雨などからの供給のバランス関係から影響する範囲は決まるものであるといった認識は必要であろう。

【参考文献】

- 1) 土木学会 水理委員会 水理公式集改訂小委員会：水理公式集 (S60 年版)，p. 378, 1985.
- 2) 赤井浩一：土質力学，朝倉書店，pp. 43-44, 1966.
- 3) Dupuit, J. : E'tude the'orique et pratique sur le mouvement des eaux dans les canaux de'couverts et a` travers les terrains perme'ables. 2nd ed. Paris, France: Dunod, 1863.
- 4) 進士喜英, 西垣誠: 水収支を考慮した揚水に伴う影響圏半径に関する一考察, 地下水学会誌, Vol. 50, No. 2, pp. 65-82, 2008.
- 5) Thiem, G., Hydrologische Methoden (Hydrologic methods), J. M. Gebhardt, Leipzig, 56p., 1906.