

解析モデル検証における Theis の井戸関数式の活用

ここで扱う井戸関数式は、Theis(1935)式 $W(\lambda)$ として知られる以下の指数積分関数 $E_1(\lambda)$ である。

$$W(\lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda)}{\lambda} d\lambda = E_1(\lambda) \quad (1.1)$$

以降の説明では、数学展開に終始することから、ここで個々のパラメータ説明しておく。井戸関数 $W(\lambda)$ は揚水試験では以下の関係式を有する。

$$s = \frac{Q}{4\pi T} W(\lambda) \quad (1.2)$$

$$\lambda = \frac{Sr^2}{4Tt} \quad (1.3)$$

ここで、 s ：水位低下（あるいは上昇）量 [L]， Q ：一定揚水（あるいは注水）流量 [L³/T]， T ：透水量係数 [L²/T]， S ：貯留係数 [-]， $T=bK$ ， b ：層厚 [L]， K ：透水係数 [L/T]， $S=bS_s$ （あるいは、 $=S_y$ ）， S_y ：比算出率（あるいは有効間隙率= n_e ）[-]， S_s ：比貯留係数， r ：揚水（あるいは注水）井戸からの距離 [L]， t ：揚水開始後の経過時間 [T]。

直接、水位低下量値を評価する場合には、関数 W の数表や近似式を活用することでこれが得られる。近似式の適用性については、別途筆者らのグループでまとめているので参照されたいが、文献記載程度の計算精度は確認できている。

さらに、流速、すなわち動水勾配を確認する場合はどのような式を用いるべきかをここで解説する。

動水勾配を求めるためには、まず (1.1) 式から $dW/d\lambda$ の誘導をしておかねばならないが、直接は幾分面倒である、しかし、以下の (2.1) 式からは以下のように誘導できる。

$$W(\lambda) = -\gamma - \log_e(\lambda) + \lambda - \frac{\lambda^2}{2 \cdot 2!} + \frac{\lambda^3}{3 \cdot 3!} - \frac{\lambda^4}{4 \cdot 4!} + \frac{\lambda^5}{5 \cdot 5!} + \dots \quad (2.1)$$

これを微分すると以下となる。

$$\begin{aligned} \frac{dW(\lambda)}{d\lambda} &= -\frac{1}{\lambda} + 1 - \frac{\lambda}{2!} + \frac{\lambda^2}{3!} - \frac{\lambda^3}{4!} + \frac{\lambda^4}{5!} + \dots \\ &= -\frac{1}{\lambda} \left[1 - \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} - \frac{\lambda^3}{3!} + \frac{\lambda^4}{4!} - \frac{\lambda^5}{5!} + \dots \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

となる。[] 内は次式の級数展開である。

$$\exp(-y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^n}{n!} = 1 - y + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^5}{5!} + \dots \quad (3.4)$$

よって、次式が成り立つ。

$$\frac{dW(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{1}{\lambda} \left[1 - \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} - \frac{\lambda^3}{3!} + \frac{\lambda^4}{4!} - \frac{\lambda^5}{5!} + \dots \right] = -\frac{\exp(-\lambda)}{\lambda} \quad (3.5)$$

① derivative 値の式

この関係は、揚水試験結果の解析の新しい手法として知られる derivative 曲線の算定に以下のようにして用いられている。（資料 4-05-1, 2）

$$\begin{aligned} &\frac{dW(\lambda)}{d \log_e(t)} \\ &= t \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{Sr^2}{4Tt} \right) \frac{-\exp(-\lambda)}{\lambda} = t \cdot \frac{-Sr^2}{4Tt^2} \frac{-\exp(-\lambda)}{\lambda} = \frac{Sr^2}{4Tt} \frac{\exp(-\lambda)}{\lambda} = \lambda \cdot \frac{\exp(-\lambda)}{\lambda} \\ &= \exp(-\lambda) \end{aligned} \quad (3.6)$$

②流速の式（ベクトルとして方向は揚水井集中）

$$\begin{aligned}
 v &= K_r i = K_r \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{K_r Q}{4\pi T} \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{K_r Q}{4\pi T} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial W}{\partial \lambda} \\
 &= \frac{K_r Q}{4\pi T} \frac{2Sr}{4Tt} \left(-\frac{\exp(-\lambda)}{\lambda} \right) = -\frac{K_r Q}{4\pi T} \frac{2}{r} \frac{Sr^2}{4Tt} \left(\frac{\exp(-\lambda)}{\lambda} \right) \\
 &= -\frac{K_r Q}{4\pi T} \frac{2}{r} \lambda \left(\frac{\exp(-\lambda)}{\lambda} \right) = -\frac{K_r Q}{4\pi T} \frac{2}{r} \exp(-\lambda) = -\frac{K_r Q}{2\pi T} \exp(-\lambda) \\
 &= -\frac{Q}{2\pi b} \exp(-\lambda)
 \end{aligned}$$

ここで、流速の符号は負となるが、揚水時の流量を正符号とした場合、流速ベクトルは半径軸 r を正から 0（井戸）に向かう方向を持つことを表す。

【参考文献】

- 1) 赤井浩一：土質力学，朝倉土木工学講座 5，朝倉書店，pp.46-56，1966.
- 2) 佐藤邦明，湯浅義朗：地下水理学，丸善，p.235，2002.
- 3) 西垣誠，高坂信章：井戸半径を考慮した揚水試験における水位低下特性とその解析方法，土質学会論文報告集，Vol.24，No.4，pp.194-204，1984.
- 4) 地盤工学会編：地盤調査の方法と解説—二分冊の1—，第7編第3章，pp.531-552，2013.
- 5) 地盤工学会編：根切り工事と地下水—調査・設計から施工まで—，現場技術者のための土と基礎シリーズ 19，p.52(揚水～回復試験の手順)，p.103(影響圏半径推定式)，1994.
- 6) 土質工学会編：土質調査法（第2回改訂版），p.353，1982.
- 7) Abramowitz, M. and Stegun, I.A.: Handbook of mathematical functions, Dover, 683, 1972
- 8) Agarwal, R.G., 1980. A new method to account for producing time effects when drawdown type curves are used to analyze pressure buildup and other test data, SPE Paper 9289, presented at the 55th SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Dallas, TX, Sept. 21-24, 1980.
- 9) Cooper, H.H. and Jacob, C.E. : A generalized graphical method for evaluating formation constants and summarizing well field history, Am. Geophys. Union Trans., vol. 27, pp. 526-534, 1946.
- 10) Neuman, S.P. : Class Note HWR503, Dept. of Hydrology and Water Resources, University of Arizona, pp.28-52, 1993.
- 11) Raghavan, R.: Well test analysis, Prentice-Hall, Inc., pp.181-182, 1993.
- 12) Theis, C.V. : The relation between the lowering of the piezometric surface and the rate and duration of discharge of a well using groundwater storage, Am. Geophys. Union Trans., vol. 16, pp. 519-524, 1935.