

特殊関数の簡略式などの整理

現場透水試験結果の理論解析で良く使う特殊関数の簡略式をまとめておく。これは、関数式の組み合わせによって複雑になるのを簡略式で書き直すことで、計算機内での 0 割や無限大になることをできるだけ防ぎ、計算範囲を拡大することも目的としている。

収録した特殊関数の目次：

- 1) 指数積分関数(Theis 井戸公式)：exponential integral func.
- 2) 誤差・余誤差関数：error and complementary error func.
- 3) 第 1, 2 種修正 0, 1 次 Bessel 関数：the 1st and 2nd kind-the 0 and 1st order modified Bessel func.
- 4) 第 1, 2 種 0, 1 次 Bessel 関数：the 1st and 2nd kind-the 0 and 1st order Bessel func.

1) 指数積分関数 (Abramowitz and Stegun, 1972)

$$\int_{\lambda}^{\infty} \frac{\exp(-y)}{y} dy = E_1(\lambda) = -\log_e(\lambda) - \gamma - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^k}{k \cdot k!} \quad (1-1)$$

ここで、 γ ：Euler (オイラー)定数=0.5772156649..., (ネット上では、 γ 値は, 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672348848677267776646709369470632917467495....と紹介されている)。

① λ が十分に小さいとき (進士, 2016)

$$E_1(\lambda) = -\gamma - \log_e(\lambda) + \varepsilon(\lambda), \quad |\varepsilon(\lambda)| \approx \lambda$$

② $0 \leq \lambda \leq 1$ のとき (Allen, 1954)

$$E_1(\lambda) + \log_e(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^4 + a_5\lambda^5 + \varepsilon(\lambda) \quad (1-2)$$

ただし、 $|\varepsilon(\lambda)| < 2 \times 10^{-7}$

$$\begin{aligned} a_0 &= -0.57721\ 566 & a_1 &= 0.99999\ 193 & a_2 &= -0.24991\ 055 \\ a_3 &= 0.05519\ 968 & a_4 &= -0.00976\ 004 & a_5 &= 0.00107\ 857 \end{aligned}$$

③ $1 \leq \lambda \leq \infty$ のとき

$$\begin{aligned} \lambda e^{\lambda} E_1(\lambda) &= \frac{\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4}{\lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + b_4} + \varepsilon(\lambda) \\ &= \frac{\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4}{\lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + b_4} \frac{1/\lambda^4}{1/\lambda^4} + \varepsilon(\lambda) = \frac{1 + \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2}{\lambda^2} + \frac{a_3}{\lambda^3} + \frac{a_4}{\lambda^4}}{1 + \frac{b_1}{\lambda} + \frac{b_2}{\lambda^2} + \frac{b_3}{\lambda^3} + \frac{b_4}{\lambda^4}} + \varepsilon(\lambda) \end{aligned} \quad (1-3)$$

ただし、 $\lambda \leq 100$ では $|\varepsilon(\lambda)| < 2 \times 10^{-8}$

$$\begin{aligned} a_1 &= 8.57332\ 87401 & a_2 &= 18.05901\ 69730 \\ a_3 &= 8.63476\ 08925 & a_4 &= 0.26777\ 37343 \\ b_1 &= 9.57332\ 23454 & b_2 &= 25.63295\ 61486 \\ b_3 &= 21.09965\ 30827 & b_4 &= 3.95849\ 69228 \end{aligned}$$

2) 誤差・余誤差関数 (Abramowitz & Stegun, 1972)

$$\text{誤差関数：} \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt$$

$$\text{余誤差関数：} \operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) \quad (2-1)$$

$$\operatorname{erf}(-z) = -\operatorname{erf}(z) \quad (2-2)$$

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!(2n+1)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \cdot z^{2n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} \quad (2-3)$$

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - (a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5) \exp(-x^2) + \varepsilon(x), \quad t = \frac{1}{1+px} \quad (2-4)$$

$$|\varepsilon(x)| \leq 1.5 \times 10^{-7}, \quad p = 0.3275911,$$

$$a_1 = 0.254829592, \quad a_2 = -0.284496736, \quad a_3 = 1.421413741,$$

$$a_4 = -1.453152027, \quad a_5 = 1.061405429,$$

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{1}{[1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6]^{16}} + \varepsilon(x) \quad (2-5)$$

$$|\varepsilon(x)| \leq 3 \times 10^{-7},$$

$$a_1 = 0.0705230784, \quad a_2 = 0.0422820123, \quad a_3 = 0.0092705272,$$

$$a_4 = 0.0001520143, \quad a_5 = 0.0002765672, \quad a_6 = 0.0000430638$$

$$x < 0.1 \text{ のとき, } \operatorname{erf}(x) \approx \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \quad (\text{Hantush, 1964}) \quad (2-6)$$

$$x > 9 \text{ のとき, } \operatorname{erf}(\sqrt{x}) \approx \frac{\exp(-x)}{\sqrt{\pi x}} \quad (\text{Hantush, 1964}) \quad (2-7)$$

3) Bessel 関数：第 1, 第 2 種修正ベッセル関数 (Abramowitz and Stegun, 1972)

a) 第 1 種 0 次修正ベッセル関数

$$\textcircled{1} \quad I_0(z) = 1 + \frac{(z^2/4)}{(1!)^2} + \frac{(z^2/4)^2}{(2!)^2} + \frac{(z^2/4)^3}{(3!)^2} + \cdots = 1 + \frac{(z/2)^2}{(1!)^2} + \frac{(z/2)^4}{(2!)^2} + \frac{(z/2)^6}{(3!)^2} + \cdots$$

$$\textcircled{2} \quad z \text{ が大きな場合, ここで, } \mu \equiv 4\nu^2$$

$$I_\nu(z) \approx \frac{\exp(z)}{\sqrt{2\pi z}} \left\{ 1 - \frac{\mu-1}{8z} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8z)^2} - \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3!(8z)^3} \right. \\ \left. + \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)(\mu-49)}{4!(8z)^4} - \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)(\mu-49)(\mu-81)}{5!(8z)^5} + \cdots \right\}$$

$$\nu=0 \text{ より, } \mu=0, \text{ よって}$$

$$I_0(z) \approx \frac{\exp(z)}{\sqrt{2\pi z}} \left\{ 1 + \frac{1}{8z} + \frac{9}{2!(8z)^2} + \frac{(9)(25)}{3!(8z)^3} + \frac{(1)(9)(25)(49)}{4!(8z)^4} + \frac{(1)(9)(25)(49)(81)}{5!(8z)^5} + \cdots \right\}$$

③

$$-3.75 \leq x \leq 3.75 \quad t \equiv x/3.75$$

$$I_0(x) = a_0 + a_2 t^2 + a_4 t^4 + a_6 t^6 + a_8 t^8 + a_{10} t^{10} + a_{12} t^{12} + \varepsilon \quad |\varepsilon| < 1.6 \times 10^{-7}$$

$$a_0 = 1 \quad a_2 = 3.5156229 \quad a_4 = 3.0899424 \quad a_6 = 1.2067492 \quad a_8 = 0.2659732$$

$$a_{10} = 0.0360768 \quad a_{12} = 0.0045813$$

④

$$3.75 \leq x < \infty \quad t \equiv x/3.75$$

$$\sqrt{x} \exp(-x) I_0(x) = a_0 + a_1 t^{-1} + a_2 t^{-2} + a_3 t^{-3} + a_4 t^{-4} + a_5 t^{-5} + a_6 t^{-6} + a_7 t^{-7} + a_8 t^{-8} + \varepsilon$$

$$|\varepsilon| < 1.9 \times 10^{-7}$$

$$a_0 = 0.39894\,228 \quad a_1 = 0.01328\,592 \quad a_2 = 0.00225\,319 \quad a_3 = -0.00157\,565 \quad a_4 = 0.00916\,281$$

$$a_5 = -0.02057\,706 \quad a_6 = 0.02635\,537 \quad a_7 = -0.01647\,633 \quad a_8 = 0.00392\,377$$

b) 第 1 種 1 次修正ベッセル関数

$$\textcircled{1} \quad I_1(z) = \frac{d}{dz} [I_0(z)] = \frac{z}{(1!)^2} + \frac{\frac{4}{z}(z/2)^4}{(2!)^2} + \frac{\frac{6}{z}(z/2)^6}{(3!)^2} + \dots = \frac{(z/2)}{(1!)^2} + \frac{2(z/2)^3}{(2!)^2} + \frac{3(z/2)^5}{(3!)^2} + \dots$$

② z が大きな場合, ここで, $\mu \equiv 4\nu^2$

$$I_\nu(z) \approx \frac{\exp(z)}{\sqrt{2\pi z}} \left\{ 1 - \frac{\mu-1}{8z} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8z)^2} - \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3!(8z)^3} \right. \\ \left. + \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)(\mu-49)}{4!(8z)^4} - \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)(\mu-49)(\mu-81)}{5!(8z)^5} + \dots \right\}$$

$\nu=1$ より, $\mu=4$

$$I_1(z) \approx \frac{\exp(z)}{\sqrt{2\pi z}} \left\{ 1 - \frac{4-1}{8z} + \frac{(4-1)(4-9)}{2!(8z)^2} - \frac{(4-1)(4-9)(4-25)}{3!(8z)^3} \right. \\ \left. + \frac{(4-1)(4-9)(4-25)(4-49)}{4!(8z)^4} - \frac{(4-1)(4-9)(4-25)(4-49)(4-81)}{5!(8z)^5} + \dots \right\}$$

$$= \frac{\exp(z)}{\sqrt{2\pi z}} \left\{ 1 - \frac{3}{8z} - \frac{(3)(5)}{2!(8z)^2} - \frac{(3)(5)(21)}{3!(8z)^3} - \frac{(3)(5)(21)(45)}{4!(8z)^4} - \frac{(3)(5)(21)(45)(77)}{5!(8z)^5} + \dots \right\}$$

③

$$-3.75 \leq x \leq 3.75 \quad t \equiv x/3.75$$

$$\frac{1}{x} \cdot I_1(x) = a_0 + a_2 t^2 + a_4 t^4 + a_6 t^6 + a_8 t^8 + a_{10} t^{10} + a_{12} t^{12} + \varepsilon \quad |\varepsilon| < 8 \times 10^{-9}$$

$$a_0 = 0.5 \quad a_2 = 0.87890\,594 \quad a_4 = 0.51498\,869 \quad a_6 = 0.15084\,934 \quad a_8 = 0.02658\,733$$

$$a_{10} = 0.00301\,532 \quad a_{12} = 0.00032\,411$$

④

$$3.75 \leq x < \infty \quad t \equiv x/3.75$$

$$\sqrt{x} \exp(-x) I_1(x) = a_0 + a_1 t^{-1} + a_2 t^{-2} + a_3 t^{-3} + a_4 t^{-4} + a_5 t^{-5} + a_6 t^{-6} + a_7 t^{-7} + a_8 t^{-8} + \varepsilon$$

$$|\varepsilon| < 2.2 \times 10^{-7}$$

$$a_0 = 0.39894\,228 \quad a_1 = -0.03988\,024 \quad a_2 = -0.00362\,018 \quad a_3 = 0.00163\,801 \quad a_4 = -0.01031\,555$$

$$a_5 = 0.02282\,967 \quad a_6 = -0.02895\,312 \quad a_7 = 0.01787\,654 \quad a_8 = -0.00420\,059$$

c) 第 2 種 0 次修正ベッセル関数

①

$$K_0(z) = - \left\{ \gamma + \log_e \left(\frac{z}{2} \right) \right\} I_0(z) + \frac{(z^2/4)}{(1!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2} \right) \frac{(z^2/4)^2}{(2!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \frac{(z^2/4)^3}{(3!)^2} + \dots$$

$$= - \left\{ \gamma + \log_e \left(\frac{z}{2} \right) \right\} I_0(z) + \frac{(z/2)^2}{(1!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2} \right) \frac{(z/2)^4}{(2!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \frac{(z/2)^6}{(3!)^2} + \dots$$

$$\textcircled{2} \quad z < 0.05 \text{ のとき, } K_0(z) \approx - \left\{ \log_e \left(\frac{z}{2} \right) + \gamma \right\} \quad (\text{Hantush, 1964})$$

③ z が大きな場合, ここで, $\mu \equiv 4\nu^2$

$$K_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \exp(-z) \left\{ 1 + \frac{\mu-1}{8z} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8z)^2} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3!(8z)^3} \right. \\ \left. + \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)(\mu-49)}{4!(8z)^4} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)(\mu-49)(\mu-81)}{5!(8z)^5} + \dots \right\}$$

$\nu=0$ より, $\mu=0$

$$K_0(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \exp(-z) \left\{ 1 + \frac{-1}{8z} + \frac{(-1)(-9)}{2!(8z)^2} + \frac{(-1)(-9)(-25)}{3!(8z)^3} \right. \\ \left. + \frac{(-1)(-9)(-25)(-49)}{4!(8z)^4} + \frac{(-1)(-9)(-25)(-49)(-81)}{5!(8z)^5} + \dots \right\}$$

③

$$0 \leq x \leq 2 \quad t \equiv x/2$$

$$K_0(x) = -\log_e(t) \cdot I_0(x) + a_0 + a_2 t^2 + a_4 t^4 + a_6 t^6 + a_8 t^8 + a_{10} t^{10} + a_{12} t^{12} + \varepsilon \quad |\varepsilon| < 1 \times 10^{-8}$$

$$a_0 = -0.57721566 \quad a_2 = 0.42278420 \quad a_4 = 0.23069756 \quad a_6 = 0.03488590 \quad a_8 = 0.00262698$$

$$a_{10} = 0.00010750 \quad a_{12} = 0.00000740$$

④

$$2 \leq x < \infty \quad t \equiv x/2$$

$$\sqrt{x} \exp(x) K_0(x) = a_0 + a_1 t^{-1} + a_2 t^{-2} + a_3 t^{-3} + a_4 t^{-4} + a_5 t^{-5} + a_6 t^{-6} + \varepsilon \quad |\varepsilon| < 1.9 \times 10^{-7}$$

$$a_0 = 1.25331414 \quad a_1 = -0.07832358 \quad a_2 = 0.02189568 \quad a_3 = -0.01062446 \quad a_4 = 0.00587872$$

$$a_5 = -0.00251540 \quad a_6 = 0.00053208$$

d) 第2種1次修正ベッセル関数

① <※注意: 未定稿>

$$K_1(z) = -\frac{d}{dz} [K_0(z)] = \left\{ \gamma + \log_e \left(\frac{z}{2} \right) \right\} I_0'(z) + \left\{ \log_e \left(\frac{z}{2} \right) \right\} I_0(z) - \frac{2(z/2)^2}{(1!)^2} - \left(1 + \frac{1}{2} \right) \frac{4(z/2)^4}{(2!)^2} \\ - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \frac{6(z/2)^6}{(3!)^2} + \dots \\ = \left\{ \gamma + \log_e \left(\frac{z}{2} \right) \right\} I_1(z) + \left\{ \frac{2}{z} \right\} I_0(z) - \frac{(z/2)}{(1!)^2} - \left(1 + \frac{1}{2} \right) \frac{2(z/2)^3}{(2!)^2} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \frac{3(z/2)^5}{(3!)^2} + \dots \\ = \left\{ \gamma + \log_e \left(\frac{z}{2} \right) \right\} I_1(z) + \frac{1}{z} I_0(z) - \frac{(z/2)}{(1!)^2} - \left(1 + \frac{1}{2} \right) \frac{2(z/2)^3}{(2!)^2} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \frac{3(z/2)^5}{(3!)^2} + \dots$$

$$\textcircled{2} \quad z < 0.05 \text{ のとき, } K_1(z) \approx \frac{1}{z} \quad (\text{Hantush, 1964}) \quad (3-7)$$

③ z が大きな場合, ここで, $\mu \equiv 4\nu^2$

$$K_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \exp(-z) \left\{ 1 + \frac{\mu-1}{8z} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8z)^2} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3!(8z)^3} \right. \\ \left. + \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)(\mu-49)}{4!(8z)^4} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)(\mu-49)(\mu-81)}{5!(8z)^5} + \dots \right\}$$

$\nu=1$ より, $\mu=4$

$$K_1(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \exp(-z) \left\{ 1 + \frac{4-1}{8z} + \frac{(4-1)(4-9)}{2!(8z)^2} + \frac{(4-1)(4-9)(4-25)}{3!(8z)^3} \right. \\ \left. + \frac{(4-1)(4-9)(4-25)(4-49)}{4!(8z)^4} + \frac{(4-1)(4-9)(4-25)(4-49)(4-81)}{5!(8z)^5} + \dots \right\} \\ = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \exp(-z) \left\{ 1 + \frac{3}{8z} + \frac{(3)(-5)}{2!(8z)^2} + \frac{(3)(-5)(-21)}{3!(8z)^3} + \frac{(3)(-5)(-21)(-45)}{4!(8z)^4} + \frac{(3)(-5)(-21)(-45)(-77)}{5!(8z)^5} + \dots \right\}$$

④

$$0 \leq x \leq 2 \quad t \equiv x/2$$

$$xK_1(x) = x \log_e(t) \cdot I_1(x) + a_0 + a_2 t^2 + a_4 t^4 + a_6 t^6 + a_8 t^8 + a_{10} t^{10} + a_{12} t^{12} + \varepsilon \quad |\varepsilon| < 8 \times 10^{-9}$$

$$a_0 = 1 \quad a_2 = 0.15443144 \quad a_4 = -0.67278579 \quad a_6 = -0.18156897 \quad a_8 = -0.01919402$$

$$a_{10} = -0.00110404 \quad a_{12} = -0.00004686$$

⑤

$$2 \leq x < \infty \quad t \equiv x/2$$

$$\sqrt{x} \exp(x) K_1(x) = a_0 + a_1 t^{-1} + a_2 t^{-2} + a_3 t^{-3} + a_4 t^{-4} + a_5 t^{-5} + a_6 t^{-6} + \varepsilon \quad |\varepsilon| < 2.2 \times 10^{-7}$$

$$a_0 = 1.25331414 \quad a_1 = 0.23498619 \quad a_2 = -0.03655620 \quad a_3 = 0.01504268 \quad a_4 = -0.00780353$$

$$a_5 = 0.00325614 \quad a_6 = -0.00068245$$

4) ベッセル関数：第一，第二種ベッセル関数 (Abramowitz and Stegun, 1972)

a) 第1種0次ベッセル関数

$$\textcircled{1} \quad J_0(z) = 1 - \frac{(z^2/4)}{(1!)^2} + \frac{(z^2/4)^2}{(2!)^2} - \frac{(z^2/4)^3}{(3!)^2} + \dots = 1 - \frac{(z/2)^2}{(1!)^2} + \frac{(z/2)^4}{(2!)^2} - \frac{(z/2)^6}{(3!)^2} + \dots$$

$$J_0'(x) = -J_1(x) \quad (\text{Hantush, 1964})$$

② $x > 0$

$$J_\nu(x) = M_\nu \cos(\theta_\nu)$$

さらに， x が大きい場合（ここで， $\mu \equiv 4\nu^2$ ）

$$M_\nu^{-2} \approx \frac{2}{\pi x} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\mu-1}{(2x)^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{(2x)^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{(2x)^6} + \dots \right\}$$

$$\theta_\nu \approx x - \left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4} \right) \pi + \frac{\mu-1}{2(4x)} + \frac{(\mu-1)(\mu-25)}{6(4x)^3} + \frac{(\mu-1)(\mu^2-114\mu+1073)}{6(4x)^3} \\ + \frac{(\mu-1)(5\mu^3-1535\mu^2+54703\mu-375733)}{14(4x)^7}$$

③ $z < 0.1 \quad J_0(x) \approx 1 \quad (\text{Hantush, 1964})$

$$z > 16 \quad J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{Hantush, 1964})$$

④ $-3 \leq x \leq 3 \quad t \equiv x/3$

$$J_0(x) = a_0 + a_2 t^2 + a_4 t^4 + a_6 t^6 + a_8 t^8 + a_{10} t^{10} + a_{12} t^{12} + \varepsilon, \quad |\varepsilon| < 5 \times 10^{-8}$$

$$\text{ここで, } a_0 = 1 \quad a_2 = -2.2499997 \quad a_4 = 1.2656208 \quad a_6 = -0.3163866$$

$$a_8 = 0.0444479 \quad a_{10} = -0.0039444 \quad a_{12} = 0.0002100$$

$$3 \leq x < \infty \quad t \equiv 3/x$$

$$J_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} f_0 \cos(\theta_0)$$

$$f_0(x) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 + a_6 t^6 + \varepsilon \quad |\varepsilon| < 1.6 \times 10^{-8}$$

$$\theta_0(x) = x + b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5 + b_6 t^6 + \varepsilon \quad |\varepsilon| < 7.0 \times 10^{-8}$$

$$a_0 = 0.79788456 \quad a_1 = -0.00000077 \quad a_2 = -0.00552740 \quad a_3 = -0.00009512$$

$$a_4 = 0.00137237 \quad a_5 = -0.00072085 \quad a_6 = 0.00014476$$

$$b_0 = -0.78539816 \quad b_1 = -0.04166397 \quad b_2 = -0.00003954 \quad b_3 = 0.00262573$$

$$b_4 = -0.00054125 \quad b_5 = -0.00029333 \quad b_6 = 0.00013558$$

b) 第1種1次ベッセル関数

$$\textcircled{1} \quad z < 0.1 \quad J_1(x) \approx \frac{z}{2} \quad (\text{Hantush, 1964})$$

$$z > 16 \quad J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{Hantush, 1964})$$

$$\textcircled{2} \quad x > 0 \quad J_\nu(x) = M_\nu \cos(\theta_\nu)$$

さらに, x が大きい場合 (ここで, $\mu \equiv 4\nu^2$) M_ν , θ_ν は関数 J_0 に掲載分と同じ

$$\textcircled{3} \quad -3 \leq x \leq 3 \quad t \equiv x/3$$

$$\frac{1}{x} J_1(x) = a_0 + a_2 t^2 + a_4 t^4 + a_6 t^6 + a_8 t^8 + a_{10} t^{10} + a_{12} t^{12} + \varepsilon \quad |\varepsilon| < 1.3 \times 10^{-8}$$

$$\text{ここで, } a_0 = 0.5 \quad a_2 = -0.56249985 \quad a_4 = 0.21093573 \quad a_6 = -0.03954289$$

$$a_8 = 0.00443319 \quad a_{10} = -0.00031761 \quad a_{12} = 0.00001109$$

$$3 \leq x < \infty \quad t \equiv 3/x$$

$$J_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} f_1 \cos(\theta_1)$$

$$f_1(x) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 + a_6 t^6 + \varepsilon \quad |\varepsilon| < 4 \times 10^{-8}$$

$$\theta_1(x) = x + b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5 + b_6 t^6 + \varepsilon \quad |\varepsilon| < 9 \times 10^{-8}$$

$$a_0 = 0.79788456 \quad a_1 = 0.00000156 \quad a_2 = 0.01659667 \quad a_3 = 0.00017105$$

$$a_4 = -0.00249511 \quad a_5 = 0.00113653 \quad a_6 = -0.00020033$$

$$b_0 = -2.35619449 \quad b_1 = 0.12499612 \quad b_2 = 0.00005650 \quad b_3 = -0.00637879$$

$$b_4 = 0.00074348 \quad b_5 = 0.00079824 \quad b_6 = -0.00029166$$

c) 第2種0次ベッセル関数

①

$$\begin{aligned} Y_0(z) &= \frac{2}{\pi} \left\{ \gamma + \log_e \left(\frac{z}{2} \right) \right\} J_0(z) + \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{(z^2/4)}{(1!)^2} - \left(1 + \frac{1}{2} \right) \frac{(z^2/4)^2}{(2!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \frac{(z^2/4)^3}{(3!)^2} + \dots \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \gamma + \log_e \left(\frac{z}{2} \right) \right\} J_0(z) + \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{(z/2)^2}{(1!)^2} - \left(1 + \frac{1}{2} \right) \frac{(z/2)^4}{(2!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \frac{(z/2)^6}{(3!)^2} + \dots \right\} \end{aligned}$$

② $x > 0$

$$Y_\nu(x) = M_\nu \sin(\theta_\nu)$$

さらに、 x が大きい場合（ここで、 $\mu \equiv 4\nu^2$ ） M_ν , θ_ν は関数 J_0 に掲載分と同じ

$$\textcircled{3} \quad -3 \leq x \leq 3 \quad t \equiv x/3$$

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \log_e \left(\frac{x}{2} \right) J_0(x) + a_0 + a_2 t^2 + a_4 t^4 + a_6 t^6 + a_8 t^8 + a_{10} t^{10} + a_{12} t^{12} + \varepsilon \quad |\varepsilon| < 1.4 \times 10^{-8}$$

$$\text{ここで、} a_0 = 0.36746 \, 691 \quad a_2 = 0.60559 \, 366 \quad a_4 = -0.74350 \, 384 \quad a_6 = 0.25300 \, 117$$

$$a_8 = -0.04261 \, 214 \quad a_{10} = 0.00427 \, 916 \quad a_{12} = -0.00024 \, 846$$

$$3 \leq x < \infty \quad t \equiv 3/x$$

$$Y_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} f_0 \sin(\theta_0) \quad \text{ここで、} f_0 \text{ および } \theta_0 \text{ は関数 } J_0 \text{ の定義と同じ}$$

d) 第2種1次ベッセル関数

$$\textcircled{1} \quad x > 0$$

$$Y_\nu(x) = M_\nu \sin(\theta_\nu)$$

さらに、 x が大きい場合（ここで、 $\mu \equiv 4\nu^2$ ） M_ν , θ_ν は関数 J_0 に掲載分と同じ

$$\textcircled{2} \quad -3 \leq x \leq 3 \quad t \equiv x/3$$

$$xY_1(x) = \frac{2x}{\pi} \log_e \left(\frac{x}{2} \right) J_1(x) + a_0 + a_2 t^2 + a_4 t^4 + a_6 t^6 + a_8 t^8 + a_{10} t^{10} + a_{12} t^{12} + \varepsilon \quad |\varepsilon| < 1.1 \times 10^{-7}$$

$$\text{ここで、} a_0 = -0.63661 \, 98 \quad a_2 = 0.22120 \, 91 \quad a_4 = 2.16827 \, 09 \quad a_6 = -1.31648 \, 27$$

$$a_8 = 0.31239 \, 51 \quad a_{10} = -0.04009 \, 76 \quad a_{12} = 0.00278 \, 73$$

$$3 \leq x < \infty \quad t \equiv 3/x$$

$$Y_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} f_1 \sin(\theta_1) \quad \text{ここで、} f_1 \text{ および } \theta_1 \text{ は関数 } J_1 \text{ の定義と同じ}$$

これらの関数を使うシーンはいくつかあるが、筆者の経験では数値的逆 Laplace 変換技法を用いた場合の、第二種変形ベッセル関数を用いた場合に、Laplace 場での水位低下量関数値が 0 除などで無限大をとることもあり、計算機のもつ有効範囲を超え、計算が滞るケースである。特に、比較的早い時間における井戸貯留問題、定圧揚水問題、有限側方境界問題の場合である。このようにまとめてみると、無限小口径井定流量無限遠方境界である Theis 式以外は皆何らかの対策を必要とする。また、Cooper らのスラグ試験結果の解析式は、有限径井戸の井戸貯留問題の類であり、これも同様に早い時間での収束性が悪い。関連する項にここで示した近似式の活用を示しておく。

【参考文献】

- 1) Abramowitz, M. & I.A. Stegun : Handbook of mathematical functions, Dover Publications, Inc., p.1040, 1972.
- 2) Hantush, M.S.: Hydraulics of wells, Advances in Hydrosience, Vol.1, ed.by V.T.Chow, pp.281-432, 1964.
- 3) 進士 喜英, 菱谷智幸, 今井紀和 : 井戸理論の数値化に関する一考察—Theis 式の近似化—, 日本地下水学会春季講演会予稿集, pp.98-101, 2016.

【付録】Bessel 関数

第一種および第二種 ν 次ベッセル関数 J_ν , Y_ν は以下の方程式の解である。

$$z^2 \frac{d^2 \omega}{dz^2} + z \frac{d\omega}{dz} + (z^2 - \nu^2) \omega = 0$$

修正第一種および修正第二種 ν 次ベッセル関数 I_ν , K_ν は以下の方程式の解である。

$$z^2 \frac{d^2 \omega}{dz^2} + z \frac{d\omega}{dz} - (z^2 + \nu^2) \omega = 0$$