井戸理論解における Laplace 変換に関する一考察

読者諸兄におかれては，Laplace 変換という数学技法をご存知だろうか？筆者は，工学系大学 3 回生，工業数学 3 という（30 年近く前）講義で初めて習った。しかしながら，その活用については，偏微分方程式が常微分方程式に変換して解ける，という程度しか記憶が無かった。しかし，井戸理論のように揚水や注水する単一の井戸を中心にした放射状流の拡散方程式を解く場合，本資料でも取り上げたように種々の方法が提案されている，中でも Laplace 変換は理論展開が系統的でありながら，汎用性に富んだ境界条件の取り込みを許容する優れた数学技法であることが示されてきた。この技法の開発やその後の理論的な裏づけ確認の流れは，数学史としても興味深い内容であり，参考文献をお読みになることをお勧めしたい。

Laplace 変換が系統立って適用できる最大の利点は，多くの関数形に対して変換式があらかじめ用意されており，さらにこれらを適宜用いることで新たな関数形の変換が得られるところにある。しかしながら，全ての関数形に対して順変換および逆変換が可能であるというわけではない。このことから，新たな理論解の誘導に対して Laplace 変換技法を用いるとしても，最終的に逆変換できる確実な見込みがないため，この方法の着手にためらう向きもある。

ここでは，基本的な活用について解説しておく。

時間 t を変数にした関数 $f(t)$ の Laplace 変換の基本式は次式である。

$$L\left[f(t)\right]=\int_0^\infty \exp(pt)f(t)dt \tag{1}$$

ここで，L：Laplace 演算子，p：Laplace 変数。

数学書では Laplace 変数 p を s と標記するものも多いが，井戸理論では s は水位低下量と意味づけることが多いので，ここでは p を用いている。また，Laplace 変換された関数は以下の標記で表すことも一般的である。

$$\overline{f(p)}=L\left[f(t)\right] \tag{2}$$

他には，変換の前後で大文字，小文字，すなわち，F と f の使い分けで表す場合もあることを覚えておきたい。では，特に断りの無い限り，標記 $\overline{f(p)}$ を Laplace 変換場の関数としておく。

Laplace 変換の基本式からいくつかの時間関数を変換（つまり積分作業）してみると，意外と簡単に実施できる。しかし，実場の関数 $f(t)$には時間に対して滑らかに連続的であることが要求される。なお，(1)式が Laplace 変換の一般的な定義であるが，$L\left[f(t)\right]=p\int_0^\infty \exp(pt)f(t)dt$ とした定義を持つ場合もある。後述するように，この変換作業には予め変換表が用意されており非常に有用であるが，必ず変換式の定義を確認してから活用されることを注意しておく。

ここで，注意したいのは，例えば，$f(t)$=a といった時間項を含まないものも変換すれば，$\overline{f(p)}=\dfrac{a}{p}$ となるため，時間項が無いからと無視してはいけない。また，時間微分やそれ以外（例えば距離に対する）微分項は以下なる。

$$L\left[\frac{\partial s}{\partial t}\right]=p\bar{s}-s(t=0)$$

$$L\left[\frac{\partial}{\partial r}\right]=\frac{d\bar{s}}{dr}$$

具体的な適用は，Laplace 変換による Theis 式の誘導など見ていただきたいが，(1)式の積分式による変換は，境界条件などに対して実施することになり，方程式などは非常に簡単に標記を含め，若干の修正で済むことになる。

井戸理論解の誘導における Laplace 変換作業の一般的な流れを確認しておく。

Step-1：支配方程式，境界条件を全て Laplace 変換する

Step-2：Laplace 変換場での一般解および境界条件を導入した特異解を求める

Step-3：特異解を逆 Laplace 変換して実（時間）場の解を得る

実際を見てみると，Step-1,2 は比較的容易に実施できる。面倒な計算もあるが，煩雑なだけで難易度は低い。これに対して，Step-3 は非常に難しい。例えば，実（時間）場での Theis の井戸関数（指数積分関数）は，Laplace 変換場では以下の式形で得られる。

$$\frac{\bar{s}}{Q/2\pi T} = \frac{1}{p} K_0\left(\sqrt{\frac{p}{\nu}} \cdot r\right) \tag{1}$$

ここで，p：Laplace 変数，$\nu = T/S$，K_0：第二種 1 次修正ベッセル関数。

これを，直接変換するには，一般の数学書の Laplace 変換表でこれを探してもなかなか見つからない。筆者は，Hantush の論文で唯一これを見つけた。他の文献も探しているが今のところ見つかっておらず，クロスチェックができないのも不安である。そこで，幾分簡素な以下の式形から逆変換を誘導してみる（“→”の左辺が Laplace 場，右辺が実場としている）（Abramowitz and Stegun(1972)[1)]）。

$$K_0\left(\kappa\sqrt{p}\right) \rightarrow \frac{1}{2t}\exp\left(\frac{-\kappa^2}{4t}\right) \tag{2}$$

これを用いる際に，以下の convolution 公式を使うことができる。

$$f_1(p) \cdot f_2(p) \rightarrow \int_0^t F_1(t-\tau) \cdot F_2(\tau) d\tau \tag{3}$$

ここで，f は F の Laplace 変換関数である。

これによって，以下の展開が可能となる。まず(3)式における，関数 f_1 および f_2 を以下とする。

$$f_1(p) = \frac{1}{p} \qquad f_2(p) = K_0\left(\sqrt{\frac{p}{\nu}} \cdot r\right) = K_0\left(\frac{r}{\sqrt{\nu}}\sqrt{p}\right)$$

関数 f_2 において $\kappa = r/\sqrt{(\nu)}$とおく。これを(3)式にあて，(2)式を代入していくと以下の展開となる。ここで，Laplace 場 $1/p$ →実場 1 の逆変換となる。

$$f_1(p) \cdot f_2(p) = \frac{1}{p} \cdot K_0\left(\kappa\sqrt{p}\right) \rightarrow \int_0^t 1 \cdot \frac{1}{2\tau}\exp\left(\frac{-\kappa^2}{4\tau}\right) d\tau \tag{4}$$

ここで，$u = \dfrac{\kappa^2}{4\tau}$ とすると，$\dfrac{du}{d\tau} = \dfrac{-\kappa^2}{4\nu\tau^2} = \dfrac{-u}{\tau}$

$$\int_0^t \frac{1}{2\tau}\exp\left(\frac{-\kappa^2}{4\tau}\right) d\tau = \int_\infty^u \frac{1}{2\tau}\frac{-\tau}{u}\exp(-u)du = \frac{1}{2}\int_u^\infty \frac{1}{u}\exp(-u)du$$

よって，以下の逆変換がなしえたことになる。

$$\frac{\bar{s}}{Q/2\pi T} = \frac{1}{p} K_0\left(\sqrt{\frac{p}{\nu}} \cdot r\right) \rightarrow \frac{s}{Q/2\pi T} = \frac{1}{2}\int_u^\infty \frac{1}{u}\exp(-u)du$$

ここで，u は以下である。

$$u = \frac{\kappa^2}{4t} = \frac{r^2}{4\alpha t} = \frac{Sr^2}{4Tt}$$

これらは，Theis の井戸関数を表している。

Hantush は他にも提示している。例えば，古典的な漏水問題と言われるが，加圧層である粘性土層内の地下水挙動は定常であるとした問題である。この問題の Laplace 場での解は以下である。

$$\frac{\bar{s}}{Q/2\pi T}=\frac{1}{p}K_0\left(\sqrt{\frac{p}{\nu}+\frac{1}{B^2}}\cdot r\right)=\frac{1}{p}K_0\left(\frac{r}{\sqrt{\nu}}\sqrt{p+\frac{\nu}{B^2}}\right)=\frac{1}{p}K_0\left(\kappa\sqrt{p+a}\right)$$

ここで， $B^2=\dfrac{Tb'}{K'}$， K'：加圧層の透水係数の鉛直方向成分，b'：加圧層厚。

この逆 Laplace 変換も Hantush が与えているが，確認してみる。

まず，ベッセル関数 K_0 の部分だけ確認する。以下の公式が活用できる。

$$f_1(p-b)\to\exp(bt)F(t)$$

よって，以下とする。

$$K_0\left(\kappa\sqrt{p+a}\right)=K_0\left(\kappa\sqrt{p-(-a)}\right)\to\exp(-at)\frac{1}{2t}\exp\left(\frac{-\kappa^2}{4t}\right)=\frac{1}{2t}\exp\left(-at-\frac{\kappa^2}{4t}\right)$$

よって，

$$\frac{1}{p}K_0\left(\kappa\sqrt{p+a}\right)\to\int_0^t\frac{1}{2\tau}\exp\left(-a\tau-\frac{\kappa^2}{4\tau}\right)d\tau=\int_u^\infty\frac{1}{2u}\exp\left(-\frac{\kappa^2 a}{4u}-u\right)du$$

$$=\int_u^\infty\frac{1}{2u}\exp\left(-\frac{\kappa^2\nu}{4B^2u}-u\right)d\lambda=\int_u^\infty\frac{1}{2u}\exp\left(-\frac{r^2}{4B^2u}-u\right)du$$

Hantush が誘導したものと同じ式が誘導できている。

さらに，Laplace 変換を使うもうひとつの利点がある。例えば，Theis 式は指数積分関数と呼ばれ，地下水以外の分野でも活用が多く研究成果が見られ，多項式による式形があるなどしてその近似式，例えば，Cooper-Jacob 法で用いる直線勾配式も多項式形から誘導が容易である。しかし，これを Laplace 変換場で考えて見ると以下のようになる。

(1)式を再掲する。

$$\frac{\bar{s}}{Q/2\pi T}=\frac{1}{p}K_0\left(\sqrt{\frac{p}{\nu}}\cdot r\right)\tag{1}$$

ここで，関数 $K_0(z)$の漸化式は以下である。

$$K_0(z)=-\left\{\gamma+\ln\left(\frac{z}{2}\right)\right\}I_0(z)+\frac{\left(\frac{z^2}{4}\right)}{(1!)^2}+\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{\left(\frac{z^2}{4}\right)^2}{(2!)^2}+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{\left(\frac{z^2}{4}\right)^3}{(3!)^2}+\cdots\cdots$$

また

$$I_0(z)=1+\frac{\left(\frac{z^2}{4}\right)}{(1!)^2}+\frac{\left(\frac{z^2}{4}\right)^2}{(2!)^2}+\frac{\left(\frac{z^2}{4}\right)^3}{(3!)^2}+\cdots\cdots$$

これより，z が十分に小さいと，$I_0(z)=1$ となり，これにより，$K_0(z)$の z のべき乗項は無視でき，よって以下となる。

$$K_0(z) \approx -\left\{\gamma + \ln\left(\frac{z}{2}\right)\right\}$$

上式の成立要件を，Hantush(1964)は，z<0.05 としている。よって，(1)式は以下とできる。

$$\frac{\bar{s}}{Q/2\pi T} \approx \frac{-1}{p}\left\{\gamma + \ln\left(\sqrt{\frac{p}{\nu}}\cdot\frac{r}{2}\right)\right\}$$

これを整理すると以下となる。

$$\frac{\bar{s}}{Q/2\pi T} \approx \frac{-\gamma}{p} - \frac{1}{p}\left\{\ln\left(\sqrt{\frac{1}{\nu}}\cdot\frac{r}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln(p)\right\}$$

$$= -\frac{1}{p}\left\{\gamma + \ln\left(\sqrt{\frac{1}{\nu}}\cdot\frac{r}{2}\right)\right\} - \frac{1}{2p}\ln(p)$$

$$-\frac{1}{p}\left\{\gamma + \ln\left(\sqrt{\frac{1}{\nu}}\cdot\frac{r}{2}\right)\right\} - \frac{1}{2p}\ln(p) \to -\left\{\gamma + \ln\left(\sqrt{\frac{1}{\nu}}\cdot\frac{r}{2}\right)\right\} - \frac{1}{2}\{-\gamma - \ln(t)\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-\gamma - \ln\left(\frac{r^2}{4\nu}\cdot\frac{1}{t}\right)\right\} = -\frac{1}{2}\{\gamma + \ln(u)\}$$

よって，以下となる。

$$\frac{\bar{s}}{Q/2\pi T} \to -\frac{1}{2}\{\gamma + \ln(u)\}$$

Cooper & Jacob 式，即ち直線勾配式が誘導できる。

さて，このように Laplace 変換は既存の変換式の組み合わせがつかえる形に持ち込めば，相応の解決を期待できることが分かる。しかし，実際には高度な数学展開技術を必要とするため，新たな逆解析例は少なく既に発表されている論文に見られる逆変換結果のみに着目するのが一般的である。

以上のように，逆 Laplace 変換は難しい場合が多く，既に開発されているものを再確認する程度しか活用はないのかと思われるだろう。しかし，以下の二つの利点がある。

① 逆変換が困難なため，早い時間や遅い時間に時間域を分けて変換されたものがある.この時，用いる近似式に対応したパラメータなどを設定するが，この設定過程は変換の流れを追いかけることで理解できる（追いかけないと理解できない)。

② 逆 Laplace 変換が困難な場合や，既に逆変換されている解も複雑な計算式（特に無限域までの積分を含むなど）の数値化は往々にして困難な場合がある。別途説明するように，数値的逆 Laplace 変換技法が提案されている。この方法はこれまで高度な数学技法を用いないとできない逆変換を数値化の観点で可能にするだけでなく，高速の変換計算を可能にするという利点がある。

【参考文献】

1) Cooper, H.H. and C.E. Jacob： A generalized graphical method for evaluating formation constants and summarizing well field history, Am. Geophys. Union Trans., vol. 27, pp. 526-534, 1946.

2) Abramowitz, M. and Stegun, I.A.: Handbook of mathematical functions, p.374, 1964.

3) Hantush, M.S.: Advances in Hydroscience, Hydraulics of wells, p.332, 1964.