

時間微分について

正しくは、石油工学の分野から提唱されたもので、圧力変動差を時間差でみる、つまり圧力変動を時間で微分した **pressure derivative** とされている。実際のところ、Darcy 則の適用で圧力相応と見る水頭変動を長さで微分する動水勾配の定義もあるため、単に圧力微分あるいは水頭微分としてしまうと、時間でのものか距離でのものか曖昧になるため、ここでは時間微分としている。

ここでは、以下の構成で解説する。

- (1) 時間微分の定義と計算方法
- (2) 使い方 (その 1)
- (3) 使い方 (その 2)
- (4) 求め方

(1) 時間微分の定義と計算方法

まず、はじめに、揚水試験の代表的な結果である時間変化する水位低下曲線は Theis 曲線に代表される単調な低下が観察される。しかし、そのプロットは縦軸に水位低下量、横軸に揚水後の経過時間をとるとしても、それぞれを算術軸、または片あるいは両対数軸と適宜変更することでそのプロット曲線形状に特徴がみられることも知られている。例えば、宇野³⁾は片対数軸上にいくつかの帯水層モデルから得られうる水位低下パターンを整理した。同様の試みは、Kruseman らのテキストにも紹介され、このパターン分類に基づき、比較対照とする帯水層モデルを選定する考え方がとられている。しかし、進士⁴⁾が整理したように帯水層モデルと井戸モデルの結果として表現される揚水試験結果はいくつかの条件の組み合わせに過ぎず、適切に評価すれば、水位低下曲線の比較的早い時間、中間の時間、遅い時間でこれら条件の特徴が見えてくる。

しかしながら、理論解ではその特徴は比較的明示しやすいが、測定誤差を含む実測データにおいては、算術や対数軸といった見せ方の違いでこれら条件の違いを評価することには限界もあり、条件の違いを拡大して表現できる技法が望まれるところであり、まさに、**derivative** プロットがその有効な技法の一つであるといえる。

Boulet¹⁾によって説明された **derivative** プロットは、Cooper-Jacob 法で用いる片対数軸上のプロット曲線の各時間における接線勾配値に着目したものであり、以下の定義である。

$$\text{derivative} = \frac{ds}{d \ln(t)} = \frac{ds}{2.3d \log(t)} \quad (1)$$

ここで、 \ln は自然対数、 \log は常用対数を表す。Cooper-Jacob 法では片常用対数軸であるが、数学的に処理のしやすい自然対数としている。

(2) 使い方 (その 1)

下図にいくつかの帯水層および井戸モデル（これらをあわせて流れ、フローモデルという）の整理結果を示す。ここで示したものは、いずれも被圧帯水層に完全貫入井戸で一定揚水流量した際の、井戸内あるいは井戸近傍の水位低下量であり、比較的特徴のあるものであるため、(a)、(b)でもそれぞれの特徴は伺えるが、(c)や(d)といったプロットを見ると、(a)、(b)で曲線が重なるところの多いものが、(c)、(d)では分離できているものが見られ特徴の差異が顕著になっている（ここで、Boulet¹⁾による **derivative** は(d)に示したものになる）。

さらに、図中に示す早い時間、中間の時間、遅い時間では、以下の説明を Horn²⁾が示している。

- ・ 比較的早い時間：井戸仕様に由来する特徴がみられる
- ・ 中間の時間：帯水層の透水性や上下隣接層からの漏水の影響がみられる
- ・ 遅い時間：遠方境界の影響がみられる

数字で定量的に表すことのできるものもあるが、定性的な表現が少なくない上、上述の時間区分も明確な

規定は無い。このため、極めて定性的な表現になっていることは否めず、万人の理解を得るまでには幾分時間を要するだろうが、これらが相応の効果を持つことは理解されるだろう。

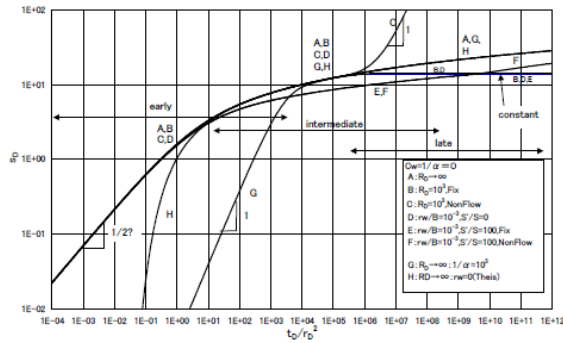


図-1(a) 両対数軸上 $\log(s)-\log(t)$ 型の整理

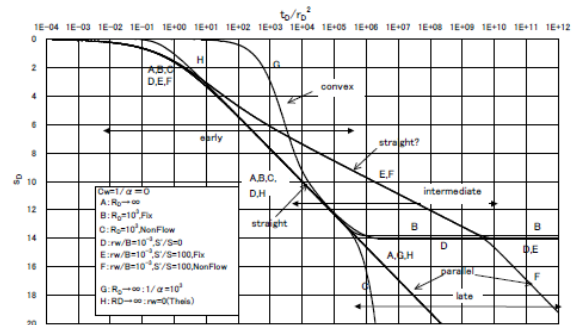


図-1(b) 両対数軸上 $s-\log(t)$ 型の整理

【解像度を上げる】

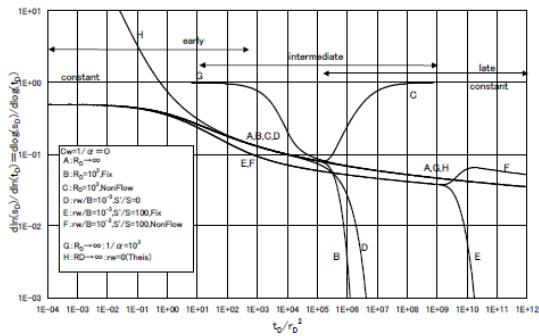


図-1(c) $\log(s)-\log(t)$ 曲線の接線勾配値

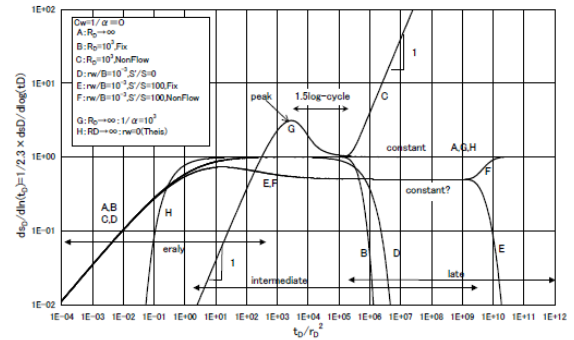


図-1(d) $s-\log(t)$ 曲線の接線勾配値

表-1 図-1 中の水位低下量曲線のもつフローモデル条件

曲線	井戸径	井戸貯留	側方境界	漏水	
				定非定常	漏水層上端部
A	有	無	∞	漏水無	—
B	有	無	有限 $R_D=10^3$ (定水位)	漏水無	—
C	有	無	有限 $R_D=10^3$ (不透水)	漏水無	—
D	有	無	∞	定常 $\nu(S/S)=0$ 漏水 $r_w/B=10^{-3}$	定水位
E	有	無	∞	非定常 $\nu(S/S)=100$ 漏水 $r_w/B=10^{-3}$	定水位
F	有	無	∞	非定常 $\nu(S/S)=100$ 漏水 $r_w/B=10^{-3}$	不透水
G	有	有 ($\alpha=10^{-3}$)	∞	漏水無	—
H	無	—	∞	漏水無	—

(3) 使い方 (その2)

図-2 は Hantush の漏水モデルとよばれるもので、漏水層の貯留性が考慮されない問題である。これらの特徴を見て、標準曲線一致法を適用するとした場合、どの標準曲線と水位低下プロットを合わせた方が効果的か考えてみよう。図の並びは図-1と同じである。一般には左上の両対数 $\log(s)-\log(t)$ 型であるが、それ

よりも derivative 系の(c)や(d)の方が漏水因子 B の特徴が明瞭にみられることが分かる。一般の標準曲線一致法である両対数 $\log(s)\text{-}\log(t)$ 系も含め、標準曲線一致法に derivative 系のプロットを使った場合の水位低下量軸である縦軸から得られる一致座標比を整理した。このように、derivative 系のプロットを用いても帯水層定数の同定が可能である。

表-2 標準曲線一致法における一致座標比の整理

実測縦軸座標値	標準縦軸座標値	一致座標比
s	s_D	$\frac{s_D^*}{s^*} = \frac{4\pi T}{Q_0}$
ds/dt	ds_D/dt_D	$\frac{(ds_D/dt_D)^*}{(ds/dt)^*} = \frac{4\pi S_w^2}{Q_0}$
$ds/d \ln(t)$	$ds_D/d \ln(t_D)$	$\frac{(ds_D/d \ln(t_D))^*}{(ds/d \ln(t))^*} = \frac{4\pi T}{Q_0}$
$ds/d \log(t)$	$ds_D/d \log(t_D)$	$\frac{(ds_D/d \log(t_D))^*}{(ds/d \log(t))^*} = \frac{4\pi T}{Q_0}$
$d \log(s)/d \log(t)$	$d \log(s_D)/d \log(t_D)$	$\frac{(d \log(s_D)/d \log(t_D))^*}{(d \log(s)/d \log(t))^*} = 1$

表中*は一致点座標読み値

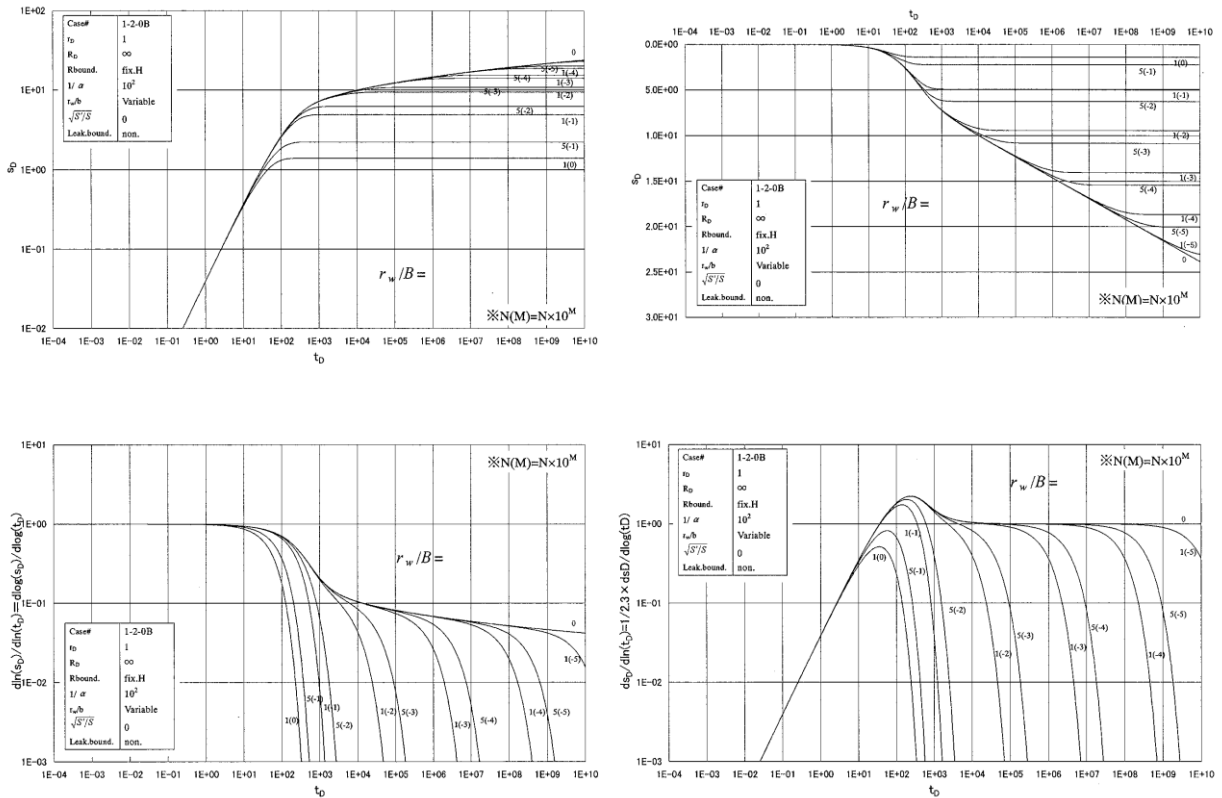


図-2

(4) 求め方

では、実際の測定結果からどのようにして derivative 系のプロットを作成するのか考えてみる。考えられる derivative 系は、以下の二つである。

$$derivative = \frac{ds}{d \ln(t)} = \frac{ds}{2.3 d \log(t)} \tag{2}$$

$$derivative - 2 = \frac{d \ln(s)}{d \ln(t)} = \frac{d \log(s)}{d \log(t)} \tag{3}$$

これらは後述するように、対数変換した状態で点間での直線勾配を考えることができる。また、以下のよう展開できるので、 ds/dt を求めることで変化することもできである。ここでは、微分公式 $d\ln(x)/dx=1/x$ を活用する。

$$derivative = \frac{ds}{2.3d \log(t)} = \frac{ds}{d \ln(t)} = \frac{ds}{dt} \frac{dt}{d \ln(t)} = t \cdot \frac{ds}{dt} \quad (4)$$

$$derivative.2 = \frac{d \ln(s)}{d \ln(t)} = \frac{d \log(s)}{d \log(t)} = \frac{d \ln(s)}{ds} \frac{ds}{dt} \frac{dt}{d \ln(t)} = \frac{t}{s} \frac{ds}{dt} \quad (5)$$

a) 点間での直線勾配

微分値は、差分計算でデータ間の直線勾配を求めることが基本的な算出法である。その方法には隣り合う 2 点間のデータを用いる 2 点法や前後のデータを用いる 3 点法などがある。以下に算出方法を示す。

i) 2 点法

ここでは、以下の関係式を用いて算定する。

$$derivative = \frac{ds}{2.3d \log(t)} = \frac{ds}{d \ln(t)} = \frac{ds}{dt} \frac{dt}{d \ln(t)} = t \cdot \frac{ds}{dt} \quad (6)$$

$$= t_m \cdot \frac{s_j - s_i}{t_j - t_i}$$

ここで、時間 t_m は 2 点間の平均時間 $((t_j+t_i)/2)$ を示す。

ii) 3 点法

Horn(1997)²⁾ は、3 点を選んで計算する以下の式を提示している。

$$derivative = \frac{ds}{2.3d \log(t)} = \frac{ds}{d \ln(t)} = \frac{ds}{dt} \frac{dt}{d \ln(t)} = t \cdot \frac{ds}{dt} \quad (7)$$

$$= t_i \cdot \left[\frac{(t_i - t_{i-1})s_{i+1}}{(t_{i+1} - t_i)(t_{i+1} - t_{i-1})} + \frac{(t_{i+1} + t_{i-1} - 2t_i)s_i}{(t_{i+1} - t_i)(t_i - t_{i-1})} - \frac{(t_{i+1} - t_i)s_{i-1}}{(t_i - t_{i-1})(t_{i+1} - t_{i-1})} \right] \quad (8)$$

この式だけでは、図上でどのような点間勾配を取っているのか、わかりづらいが Bourdet¹⁾ が以下の計算式を提示している。

$$derivative(Bourdet) = \frac{\frac{(s_i - s_{i-1})(t_{i+1} - t_i) + (s_{i+1} - s_i)(t_i - t_{i-1})}{(t_i - t_{i-1})(t_{i+1} - t_i)}}{(t_i - t_{i-1}) + (t_{i+1} - t_i)}$$

これは、3 点の中で連続する 2 点間の勾配をそれぞれとり、各時間間隔長を考慮した重み平均である。これを整理すると以下ようになる

$$\begin{aligned} & derivative(Bourdet) \\ &= \frac{\frac{(s_i - s_{i-1})(t_{i+1} - t_i) + (s_{i+1} - s_i)(t_i - t_{i-1})}{(t_i - t_{i-1})(t_{i+1} - t_i)}}{(t_i - t_{i-1}) + (t_{i+1} - t_i)} = \frac{1}{(t_i - t_{i-1}) + (t_{i+1} - t_i)} \left[\frac{(s_i - s_{i-1})(t_{i+1} - t_i) + (s_{i+1} - s_i)(t_i - t_{i-1})}{(t_i - t_{i-1})(t_{i+1} - t_i)} \right] \\ &= \frac{1}{(t_i - t_{i-1}) + (t_{i+1} - t_i)} \left[\frac{s_i}{(t_i - t_{i-1})} (t_{i+1} - t_i) + \frac{-s_{i-1}}{(t_i - t_{i-1})} (t_{i+1} - t_i) + \frac{s_{i+1}}{(t_{i+1} - t_i)} (t_i - t_{i-1}) + \frac{-s_i}{(t_{i+1} - t_i)} (t_i - t_{i-1}) \right] \\ &= \frac{1}{(t_{i+1} - t_{i-1})} \frac{(t_i - t_{i-1})}{(t_{i+1} - t_i)} s_{i+1} + \frac{1}{(t_{i+1} - t_{i-1})} \left[\frac{(t_{i+1} - t_i)}{(t_i - t_{i-1})} - \frac{(t_i - t_{i-1})}{(t_{i+1} - t_i)} \right] s_i + \frac{1}{(t_{i+1} - t_{i-1})} \frac{(t_{i+1} - t_i)}{(t_i - t_{i-1})} - s_{i-1} \\ &= \frac{1}{(t_{i+1} - t_{i-1})} \frac{(t_i - t_{i-1})}{(t_{i+1} - t_i)} s_{i+1} + \frac{1}{(t_{i+1} - t_{i-1})} \left[\frac{(t_{i+1} - t_i)^2 - (t_i - t_{i-1})^2}{(t_i - t_{i-1})(t_{i+1} - t_i)} \right] s_i + \frac{1}{(t_{i+1} - t_{i-1})} \frac{(t_{i+1} - t_i)}{(t_i - t_{i-1})} - s_{i-1} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、第 3 項のみ取り出して整理してみる。

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{(t_{i+1}-t_{i-1})} \left[\frac{(t_{i+1}-t_i)^2 - (t_i-t_{i-1})^2}{(t_i-t_{i-1})(t_{i+1}-t_i)} \right] s_i \\
 &= \frac{1}{(t_{i+1}-t_{i-1})} \left[\frac{(t_{i+1}^2 - 2t_{i+1}t_i + t_i^2) - (t_i^2 - 2t_it_{i-1} + t_{i-1}^2)}{(t_i-t_{i-1})(t_{i+1}-t_i)} \right] s_i \\
 &= \frac{1}{(t_{i+1}-t_{i-1})} \left[\frac{(t_{i+1}^2 - 2t_{i+1}t_i + t_i^2) - (t_i^2 - 2t_it_{i-1} + t_{i-1}^2)}{(t_i-t_{i-1})(t_{i+1}-t_i)} \right] s_i \tag{9'} \\
 &= \frac{1}{(t_{i+1}-t_{i-1})} \left[\frac{t_{i+1}^2 - 2t_{i+1}t_i + t_i^2 - t_i^2 + 2t_it_{i-1} - t_{i-1}^2}{(t_i-t_{i-1})(t_{i+1}-t_i)} \right] s_i = \frac{1}{(t_{i+1}-t_{i-1})} \left[\frac{t_{i+1}^2 - 2t_{i+1}t_i + 2t_it_{i-1} - t_{i-1}^2}{(t_i-t_{i-1})(t_{i+1}-t_i)} \right] s_i \\
 &= \frac{1}{(t_{i+1}-t_{i-1})} \left[\frac{t_{i+1}^2 - t_{i-1}^2 - 2t_i(t_{i+1} - 2t_{i-1})}{(t_i-t_{i-1})(t_{i+1}-t_i)} \right] s_i = \left[\frac{t_{i+1} + t_{i-1} - 2t_i}{(t_i-t_{i-1})(t_{i+1}-t_i)} \right] s_i
 \end{aligned}$$

よって、Bourdet の提案式は以下とる。

$$\begin{aligned}
 & \text{derivative(Bourdet)} \\
 &= \frac{1}{(t_{i+1}-t_{i-1})} \frac{(t_i-t_{i-1})}{(t_{i+1}-t_i)} s_{i+1} + \left[\frac{t_{i+1} + t_{i-1} - 2t_i}{(t_i-t_{i-1})(t_{i+1}-t_i)} \right] s_i + \frac{1}{(t_{i+1}-t_{i-1})} \frac{(t_{i+1}-t_i)}{(t_i-t_{i-1})} s_{i-1} \tag{10}
 \end{aligned}$$

このことから、Home の示した 3 点法は Bourdet の勾配式を整理したものであることが分かり、これは連続する 2 点間の勾配を時間長さ重みを考慮した平均であるといえる。

上記のように隣り合う前後のデータポイント間の傾きから微分値を求めることは可能であるが、この方法では特に圧力変化量が小さい部分ではしばしばデータのばらつき(noise)が見られることが多い。このため、いくつかのデータを間引くことで改善されることが多い。Home(1997)²⁾は次式に示す、対数時間 0.2 以上の間隔を開ける方法を推奨している。

$$\frac{ds}{d \ln(t)} = \frac{\ln(t_i/t_{i-k})}{\ln(t_{i+j}/t_i)\ln(t_{i+j}/t_{i-k})} s_{i+j} + \frac{\ln(t_{i+j}t_{i-k}/t_i^2)}{\ln(t_{i+j}/t_i)\ln(t_{i+j}/t_{i-k})} s_i + \frac{\ln(t_{i+j}/t_i)}{\ln(t_i/t_{i-k})\ln(t_{i+j}/t_{i-k})} s_{i-k} \tag{11}$$

ここで、 $\ln(t_{i+j}/t_i) \geq 0.2$ および $\ln(t_i/t_{i-k}) \geq 0.2$ とする。

これは 3 点の選定方法の考え方の違いであって、 dt ではなく $d \ln(t)$ として自然対数 \ln 上での勾配を直接求めているが、以下の差分を考慮すれば上式と同じものである。

$$\ln \left(\frac{t_i}{t_{i-k}} \right) = \ln(t_i) - \ln(t_{i-k}) \tag{12}$$

しかしながら、対数時間差 0.2、つまり、時間間隔を現時間の 1.2 倍後をとれば測定誤差の影響を受けないというのも幾分乱暴であろう。ここでは、3 点以上の点間を直線とみなしここに最小二乗近似直線を設定し、勾配を算定する方法を提示しておく。

b) 微分値の区間重み付き最小二乗法

時間微分項の計算には上記のように幾つかの方法がみられるが、基本的に測定点間の水位変動量の差分を考えており、測定精度を十分に維持できる水位差を用いないと微分値が振動(場合によっては正負におよぶ)を見せることがある。このため、測定差の少ないデータを間引いたり、上述の点間選定基準を導入して十分な測定間隔をもつデータ間での微分を計算したりするなどされている。しかし、間隔を大きくすると微分値の極値のコントラストが薄れ、緩やかな変化しか見せない平坦な結果となる傾向があり、図-1(d)で示す特性を正しく評価できず、結果の信頼性には課題が残る。特に、測定値が定常状態に収束する傾向を見せる場合には、時間間隔を大きくとっても水位の差が小さくなることから、計算された微分値のばらつきが顕著になる。

そこで、点間の差分から微分値を評価するのではなく、これらの微分値が曲線の勾配であるという本来の特性にもどり、計算区間を直線近似し、この勾配値を時間微分値として与える方法を提案する。図-1 に示す実測データセット $s-t$ プロットの接線勾配を評価する場合の手順を以下に示す。 $s-\ln(t)$ プロットの接線勾配の場合には、以下の t を $\ln(t)$ と置き換えて評価することができる。あるいは、(6)式で示した変換式を用いることができる。

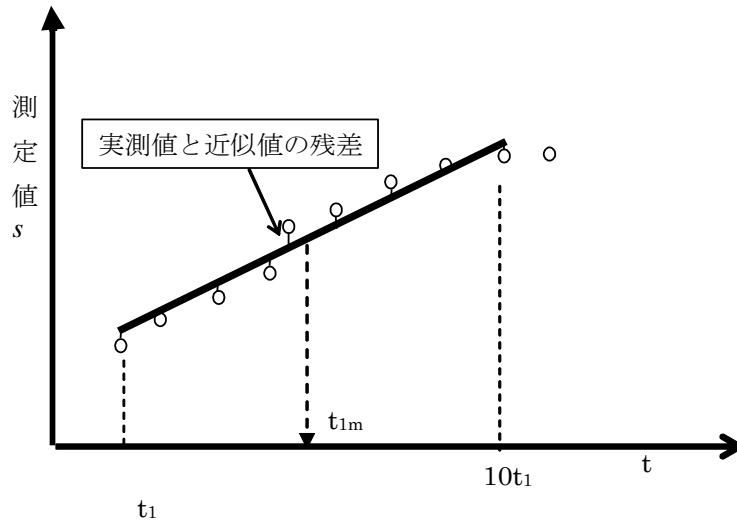


図-1 実測データプロットの直線勾配の計算例

- 手順① 直線勾配を設定する軸を決め、これに対応して s および t を軸値に変換する。
- 手順② i 番の観測時間 t_i から所定の時間区間(例えば 10 倍までの区間)に入るデータをピックアップする。
- 手順③ この区間で最小二乗近似直線を計算する。
- 手順④ ここで得られた近似値と実測値の平均残差を評価する。
- 手順⑤ 平均残差が所定の基準値よりも小さければ、選ばれた区間を直線視することの妥当性が確認されたとし、⑦へ進む。
- 手順⑥ 選ばれた区間を直線視することの妥当性が確認されない時、選んだ時間区間が長すぎたと考え、これを短い区間にする。例えば現行の時間区間長の 90% に変更するなど試行する。新しい区間に対して手順②からやり直す。

この試行では最終的に区間内に 2 点になると、平均残差は 0 に収束する。

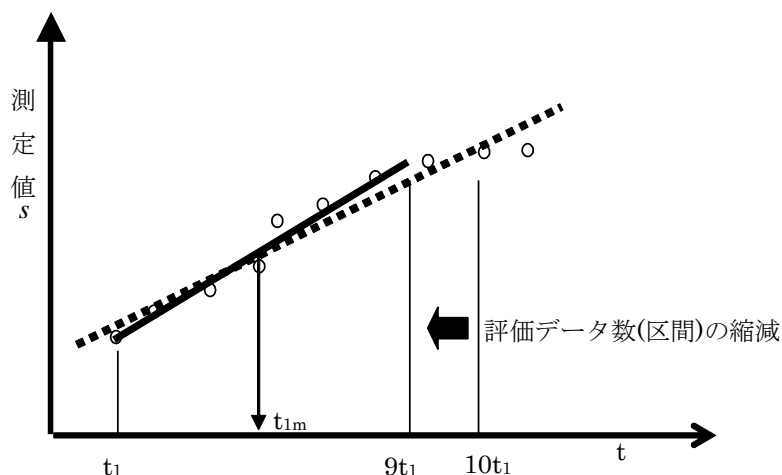


図-2 実測データプロットの直線勾配の計算範囲変更の例

- 手順⑦ 選ばれた区間を表す平均時間を求め、この時間に対する勾配値を計算結果として格納する。
- 手順⑧ ⑦までの試行が完了すれば、次の時間ステップに進む。ここでは、微分項データ数が減少することを避けるため、 $(i+1)$ 番目時間からの時間区間を設定し、③へ戻る。
- 手順⑨ $(N-1)$ 番目までの微分データが計算の完了後、各区間平均時間に対して並び替えを行う。これは、時間区間の平均を計算した微分値の代表時間 t_m とすることから、平均勾配を評価する時間区間長は収束状況によって変動し、収束の結果求められた代表時間とその格納順位は時間順とならない場合があるためである。

以上の b) の手法の利点は、最小二乗近似直線を求め実データとの適合性を残差二乗和で定量的に評価できること、測定データに有意な差がみられなくとも適切な微分値が評価できることである。これら a) および b) 計算技術では、差分のとり方(測点の選び方)に依存して、計算値が異なる特性があるため、計算結果の精度はデータに依存する。よって、これらの計算式の良否を単純に議論することはできないが、少なくとも計算値の分布に顕著なバラツキや振動が無いことを確認してから、評価に用いることが肝要である。

【参考文献】

- 1) Bourdet, D., Ayoub, J.A., Pirard, Y.M.: Use of pressure derivative in well-test interpretation, SPE formation evaluation, pp.293-302, 1989.
- 2) Horne, R.N.: Modern Well Test Analysis: A Computer-Aided Approach, Petroway, Inc., 257p., 1995.
- 3) 宇野尚雄：現地揚水試験における水位低下のパターン，岐阜大学工学部研究報告，24号，pp.13-23，1974.
- 4) 進士喜英：現場透水試験結果の解釈と活用に関する基礎的研究，岡山大学博士論文，甲第 3677号，2008.